2010

ECUACIONES DIFERENCIALES

TEORÍAS Y APLICACIONES

El siguiente documento desarrolla el contenido programático de Ecuaciones Diferenciales del programa de Ingeniería Industrial de la Universidad de La Guajira

CARLOS ARTURO MERLANO BLANCO
Ingeniero Industrial. Universidad de La Guajira
Magister en Administración de Empresas. Universidad del Norte
http://ingcarlosmerlano.wordpress.com cmerlano@hotmail.com

UNIDAD I

Conceptos Fundamentales

UNIDAD 1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales, es decir una ecuación de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0$$

Si la función incógnita $y = y(x)$ depende de una sola variable independiente x, la ecuación diferencial se llama ordinaria. Por ejemplo,

1. $\frac{dy}{dx} + xy = 0$
2. $y'' + y' + x = cosx$
3. $(x^2 + y^2)dx + (x + y)dy = 0$

Orden de una ecuación diferencial. El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden contenida en ella.

Grado de una ecuación diferencial. Cuando una ecuación diferencial se describe como polinomio con respecto a las derivadas, la potencia a la cual se encuentra elevada la derivada de mayor orden recibe el nombre de grado.

Ejemplo 1. Indique el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales.

Ecuación diferencial	Orden	Grado
$(y'')^2 = [1 + (y')^2]^3$	2	2
$y' + ay^2 = bx^2$	1	1
$(y''')^2 - 2xy'' + y(y')^3 = 0$	3	2
$[x + (y')^2]^{\frac{3}{2}} = y''$ Elevando al cuadrado $[x + (y')^2]^3 = (y'')^2$	2	2
$y''' + cosy'' + x^2y' = x^3$	3	No tiene*

* No puede escribirse como un polinomio con respecto a las derivadas debido a la presencia dl término *cosy''*

Solución de una ecuación diferencial. Se llama solución de una ecuación diferencial, una función $y = \varphi(x)$, determinada en el intervalo (a, b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive tal que al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, esta se convierta en una identidad con respecto a x en el intervalo (a, b)

Ejemplo 2. Probar que la ecuación

$y = asenx + bcosx$, es solución de $y'' + y = 0$

Solución. En efecto, si:

$$y = asenx + bcosx$$

$$y' = acosx - bsenx; \qquad y'' = -asenx - bcosx$$

Por consiguiente, al reemplazar a *y''* e *y* en la ecuación diferencial:

$y'' + y = 0$, tenemos:

$$-asenx - bcosx + asenx + bcosx = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Lo que prueba que la ecuación $y = asenx + bcosx$, satisface a la ecuación diferencial $y'' + y = 0$

Ejemplo 3. Probar que la ecuación

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}, \qquad x \neq -1$$

es solución de la ecuación diferencial

$$(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$$

Solución. En efecto, si:

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$y' = \frac{(1 - x)(-1) - (1 - x)(1)}{(1 + x)^2} = \frac{-2}{(1 + x)^2}$$

Por consiguiente, al reemplazar a *y'* e *y* en la ecuación diferencial:

$(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$, tenemos:

$$(x^2 + 1)\frac{-2}{(1 + x)^2} + \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\frac{-2x^2 - 2 + 1 - 2x + x^2}{(1+x)^2} + 1 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Lo que prueba que la ecuación $y = \frac{1-x}{1+x}$, satisface a la ecuación diferencial $(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$

Solución general de una ecuación diferencial. Se llama solución general de una ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ a la función $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots c_n)$, que depende de las constantes arbitraria C y cumple las condiciones

1. Satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de las constantes C.
2. Cualquiera que sea la condición inicial siempre se puede asignar un valor C_o a la constantes C tal que, la función $y = \varphi(x, c_0)$ satisface las condiciones iniciales dadas

Ejemplo 4. Demostrar que la ecuación

$$y = C_1 x \cos lnx + C_2 x \sin lnx + xlnx$$

es solución de $x^2y'' - xy' + 2y = xlnx$

Solución. En efecto, si:

$$y \;=\; C_1 x \cos lnx + C_2 x \sin lnx + xlnx$$

$$y' \;= (C_2 - C_1) senlnx + (C_2 + C_1) coslnx + lnx + 1$$

$$y'' = -(C_2 + C_1)\frac{senlnx}{x} + (C_2 - C_1)\frac{coslnx}{x} + \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, al reemplazar a *y''*, *y'* e *y* en la ecuación diferencial, esta se satisface porque se obtiene una identidad

Recíprocamente teniendo una familia de curvas y excluyendo los parámetros C_1, C_2, C_3,.., C_n del sistema de ecuaciones, (derivando tantas veces como constantes arbitrarias haya), se obtiene en general una ecuación diferencial.

Ejemplo 5. Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas $y = C_1(x - C_2)^2$

Solución. Derivando dos veces la función dada, tenemos:

$$y' = 2C_1(x - C_2)$$

$$y'' = 2C_1$$

Excluyendo de las ecuaciones anteriores a C_1 y C_2 hallamos la ecuación diferencial que buscamos

$$2yy'' = y'^2$$

Solución particular de una ecuación diferencial. Se llama solución particular de una ecuación diferencial a la que se obtiene de la solución general, asignándole cualquier valor determinado a la constate arbitraria C.

Las condiciones que debe satisfacer son de dos tipos, iniciales o de frontera.

Condiciones iniciales. Es una condición que debe satisfacer la solución en un punto, por ejemplo:

a. La solución de la ecuación de desintegración radiactiva $y' = -ax$, si se conoce la cantidad de sustancia existente x_0 en un momento inicial t_0, o sea $x(t_0) = x_0$
b. La determinación de la ley de movimiento si se conoce la posición y la velocidad inicial.

Un problema con condiciones iniciales se le llama *Problema de Cauchy*

Condiciones de frontera. Es una condición que la solución debe cumplir en dos o más puntos, por ejemplo, la solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ que satisface $y(0) = 1,\ y'(2\pi) = 1$.

Un problema con condiciones de frontera se denomina *problema de contorno o problema de frontera.*

Ejemplo 6. Comprobar que la ecuación $y = x + C$ es solución general de la ecuación diferencial $y' = 1$ y hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales $f(0) = 0$ e interpretar geométricamente el resultado

Solución. La función $y = x + C$, satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de C, en efecto si:

$$y = x + C$$

$$y' = 1$$

Por lo tanto, $y = x + C$ representa la solución general de la ecuación diferencial dada.

Para las condiciones iniciales $x = 0$, $y = 0$ y reemplazando en la función

$$y = x + C$$

$$0 = 0 + C$$

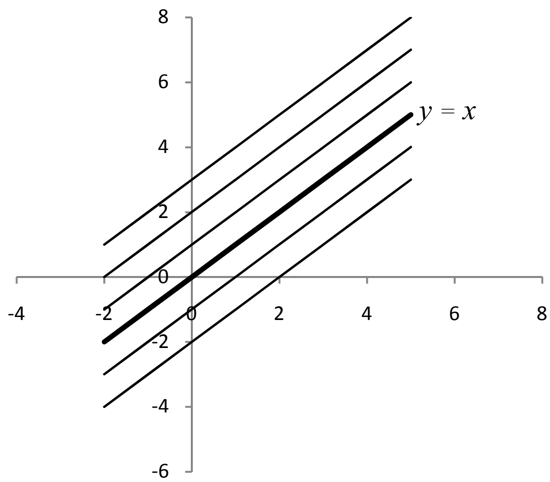
$$C = 0$$

Por consiguiente, la solución particular es

$$y = x + C$$

$$y = x + 0$$

$$y = x$$



Geométricamente, la solución general determina una familia de rectas paralelas con una inclinación de 45º

Ejemplo 7. Comprobar que la función $y = Ce^x$ es solución general de la ecuación diferencial $y' - y = 0$ y hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales $f(1) = -1$ e interpreta geométricamente el resultado

Solución. En efecto si:

$$y = Ce^x$$

$$y' = Ce^x$$

Sustituyendo a y y y' en la Ecuación diferencial

$$y' - y = 0$$

$$Ce^x - Ce^x = 0$$

$$0 \equiv 0$$

O sea, la función $y = Ce^x$ satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de C.

Para las condiciones iniciales $x = 1$, $y = -1$ y reemplazando en la función

$$y = Ce^x$$

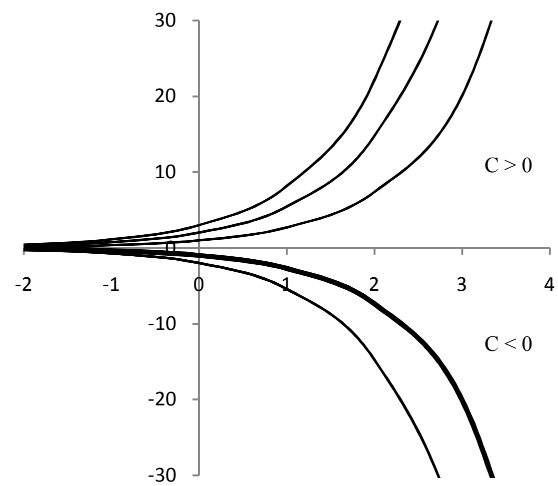
$$-1 = Ce^1$$

$$C = \frac{-1}{e^1} = -e^{-1}$$

Por consiguiente, la solución particular es

$$y = -e^{-1}e^x$$

$$y = -e^{x-1}$$



Geométricamente, la solución general determina una familia de curvas integrales que representan las gráficas de las funciones exponenciales.

Ejemplo 8. *Hallar la curva de la familia*

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

que tiene $f(0) = 1$ y $f'(0) = -2$

Solución. En efecto si:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

$$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}$$

Sustituyendo los valores $f(0) = 1$ y $f'(0) = -2$ en las ecuaciones anteriores tenemos

$$1 = C_1 + C_2$$

$$-2 = C_1 - 2C_2$$

Y resolviendo el sistema se obtiene

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 1$$

Y por consiguiente,

$$y = e^{-2x}$$

EJERCICIOS 1

Determine el orden y el grado (en caso de tenerlo) de las ecuaciones diferenciales siguientes

1. $y' = 3x^2y^5 + y^3$
2. $y'' - 2x(y')^2 = y^2$
3. $\frac{d^2s}{dt^2} - 7s^2 + \frac{ds}{dt} = 9t^3$
4. $xy' + (y'')^2 = 4$
5. $(y'')^2 = 1 + (y')^2$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x$

Verificar, en los ejercicios que se dan a continuación, que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas.

7. $y = \frac{senx}{x}$ $\quad xy' + y = cosx$
8. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ $\quad y' + 2y = e^x$
9. $y = 2 + C\sqrt{1 - x^2}$ $\quad (1 + x^2)y' + xy = 2x$
10. $y = x\sqrt{1 - x^2}$ $\quad yy' = x - 2x^3$
11. $y = e^{arcsenCx}$ $\quad xy' = ytanlny$

Verificar que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas

12. $y = \frac{C}{Cosx}$ $\quad y' - tanxy = 0$
13. $y = -\frac{1}{3x+C}$ $\quad y' = 3y^2$
14. $y = \ln{(C + e^x)}$ $\quad y' = e^{x-y}$
15. $y = \sqrt{x^2 - Cx}$ $\quad (x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$
16. $y = x(C - lnx)$ $\quad (x - y)dx + xdy = 0$
17. $x = ye^{Cy+1}$ $\quad y' = \frac{y}{x(lnx - lny)}$
18. $x = ylnCy$ $\quad y'(x + y) = y$
19. $y^2 + 2Cx = C^2$ $\quad yy'^2 + 2xy' = y + 1$

Hallar, para las familias de curvas que se dan, las líneas que satisfagan a las condiciones iniciales que se indican.

20. $x^2 - y^2 = C$ $\quad y(0) = 5$
21. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$
22. $y = C_1sen(x + C_2)$ $\quad y(\pi) = 1 \quad y'(\pi) = 0$
23. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = -2$