UNIDAD II

Ecuaciones diferenciales con variables separables

UNIDAD 2

ECUACIONES DIFERENCIALES CON VARIABLES SEPARABLES

Ecuaciones diferenciales de primer orden y de primer grado. Una ecuación diferencial es de primer orden y de primer grado cuando puede reducirse a la forma

$$Mdx + Ndy = 0$$

Siendo M y N funciones de x y y.

De las ecuaciones diferenciales que pertenecen a esta clase, las más comunes pueden agruparse en cuatro tipos: *ecuaciones con variables separables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones lineales, ecuaciones que pueden reducirse a la forma lineal*

Ecuaciones diferenciales con variables separables. Cuando los términos de una ecuación diferencial pueden disponerse de manera que tomen la forma.

$$f(x)dx + f(y)dy = 0$$

Siendo $f(x)$ una función de x únicamente y $f(y)$ una función de y únicamente, el procedimiento de solución se llama de *variables separables* y la solución se obtiene por integración directa. Así, integrando obtenemos la solución general.

$$\int f(x)dx + \int f(y)dy = C$$

En donde C es una constante arbitraria

Ejemplo 1. Resolver la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$$

Solución. Separando variables:

$$xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$$

$$\frac{ydy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \int \frac{ydy}{(1+y^2)} = C$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{(1+x^2)} - \int \frac{ydy}{(1+y^2)} = C$$

$$lnx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) - \frac{1}{2}ln(1+y^2) = C$$

$$2lnx + lnC = ln(1+x^2) + ln(1+y^2)$$

$$lnx^2 + lnC = ln(1+x^2) + ln(1+y^2)$$

$$lnx^2C = ln(1+x^2)(1+y^2)$$

$$Cx^2 = (1+x^2)(1+y^2)$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$a\left(x\frac{dy}{dx} + 2y\right) = xy\frac{dy}{dx}$$

Solución. Efectuando las operaciones indicadas y separando variables

$$ax\frac{dy}{dx} + 2ay = xy\frac{dy}{dx}$$

$$axdy + 2aydx = xydy$$

$$axdy - xydy + 2aydx = 0$$

$$x(a-y)dy + 2aydx = 0$$

$$\int \frac{(a-y)}{y}dy + 2a\int \frac{dx}{x} = C$$

$$\int \frac{a}{y}dy - \int dy + 2a\int \frac{dx}{x} = C$$

$$alny - y + 2alnx = C$$

$$a(lny + lnx^2) = y + C$$

$$lnx^2y = \frac{y}{a} + C$$

$$x^2y = e^{\frac{y}{a}+c}$$

$$x^2y = e^C \cdot e^{\frac{y}{a}}$$

$$x^2y = Ce^{\frac{y}{a}}$$

De acuerdo con nuestra definición, C es una constante arbitraria por lo tanto en los casos en que quedaba $\frac{C}{a}$, lo hicimos que fuera igual a C, dado que a y c son constantes. De igual forma e es número (constante) y por lo tanto e^c, es una constante que puede ser reemplazada por C.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$3e^x tany dx + (2 - e^x) sec^2 y dy = 0$$

Solución. Separando variables

$$\frac{3e^x}{2 - e^x}dx + \frac{sec^2 y}{tany}dy = 0$$

$$-3\int \frac{-e^x}{2 - e^x}dx + \int \frac{sec^2 y}{tany}dy = C$$

$$-3\ln(2 - e^x) + lntany = C$$

$$ln\frac{tany}{(2 - e^x)^3} = lnC$$

$$tany = C(2 - e^x)^3$$

Ejemplo 4. Hallar la solución particular de la ecuación

$$(1 + e^x)yy' = e^x$$

Que satisface a la condición inicial $f(o) = 1$

Solución. Expresando en términos de diferencial y separando variables

$$(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{(1 + e^x)}dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = ln(1 + e^x) + C$$

Para la condición $f(o) = 1$. La función queda:

$$\frac{1}{2} = ln(1 + e^0) + C$$

$$\frac{1}{2} = ln2 + C$$

$$C = \frac{1}{2} - ln2$$

Reemplazando este valor en la función

$$\frac{y^2}{2} = ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - ln2$$

$$\frac{y^2}{2} = ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Ejemplo 5. Hallar la solución particular de la ecuación

$$y'senx = ylny$$

Que satisface a las condiciones iniciales siguientes

a. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

b. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Solución. Expresando en términos de diferencial y separando variables

$$senx\frac{dy}{dx} = ylny$$

$$\int \frac{dy}{ylny} = \int \frac{dx}{senx} + C$$

$$\ln(lny) = lntan\left(\frac{x}{2}\right) + lnC$$

$$\ln(lny) = lnCtan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$lny = Ctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = e^{Ctan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

a. Para la condición $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$. La función queda:

$$e = e^{Ctan\left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$e = e^C$$

$$C = 1$$

Por lo tanto la solución particular queda:

$$y = e^{tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

b. Para la condición $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. La función queda:

$$1 = e^{Ctan\left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$e^0 = 1 = e^C$$

$$C = 0$$

Por lo tanto la solución particular queda:

$$y = e^0$$

$$y = 1$$

Ejemplo 6. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones.

a. $(2 + y)dx - (3 - x)dy = 0$

b. $x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0$

Solución. Resolviendo la segunda ecuación:

$$x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{(2x + 3)}{x(x + 3)}dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{2x}{x(x + 3)}dx - \frac{3}{x(x + 3)}dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{2}{(x + 3)}dx - \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x + 3} = 0$$

$$lny - 2ln(x + 3) - lnx + \ln(x + 3) = lnC$$

$$lny = ln(x + 3) + lnx + lnC$$

$$lny = lnCx(x + 3)$$

$$y = Cx(x + 3)$$

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo 7. Hallar una curva que pase por el punto (0, -2), de modo que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto aumentada en 3 unidades.

Solución. La pendiente de la tangente se define como $\frac{dy}{dx}$. Por lo tanto, la ecuación diferencial de la familia de curvas que cumplen la condición pedida es:

$$\frac{dy}{dx} = y + 3$$

$$\int \frac{dy}{y + 3} = \int dx + C$$

$$\ln(y + 3) = x + C$$

Como la curva buscada tiene que pasar por el punto (0, -2), la función queda:

$$\ln(-2 + 3) = 0 + C$$

$$C = 0$$

Por lo tanto la curva buscada es:

$$\ln(y + 3) = x$$

$$y + 3 = e^x$$

$$y = e^x - 3$$

Ejemplo 8. Determinar la ecuación a la curva cuya tangente en cada punto tenga pendiente $2x$. Haga la interpretación geométrica del resultado. Si la curva pasa por el punto (1, 4), hallar la solución particular.

Solución general. La pendiente de la tangente a la curva en un punto cualquiera viene dada por $\frac{dy}{dx}$. Según el problema

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Separando variables:$dy = 2xdx$, por lo tanto

$$2\int xdx - \int dy = C$$

$$x^2 - y = C \quad \rightarrow \quad y = x^2 + C$$

Interpretación. La curva representa la familia de parábola simétricas al eje y, si C > 0 el desplazamiento es hacia arriba; si C < 0 el desplazamiento es hacia abajo.

Solución particular. La curva que se pide debe pasar por el punto (1, 4), por lo tanto

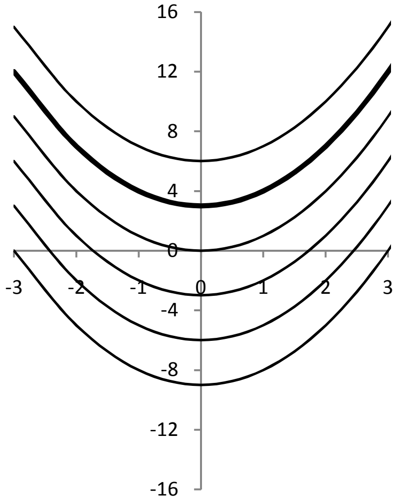
$$y = x^2 + C$$

$$4 = 1 + C$$

$$C = 3$$

La ecuación que se pide es

$$y = x^2 + 3$$



Ejemplo 9. Hallar la ecuación de una curva talque en un punto cualquiera de la pendiente de la tangente sea igual a la razón de la abscisa a la ordenada cambiada de signo. Hacer la interpretación geométrica y valorar la función cuando pasa por el punto (3, 4)

Solución general. Según la condición del problema

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Separando variables: $ydy = -xdx$, por lo tanto

$$\int xdx + \int dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

Interpretación. La curva representa la familia de circunferencias con centro en el origen.

Solución particular. La curva que se pide debe pasar por el punto (3, 4), por lo tanto

$$x^2 + y^2 = C$$

$$9 + 16 = C$$

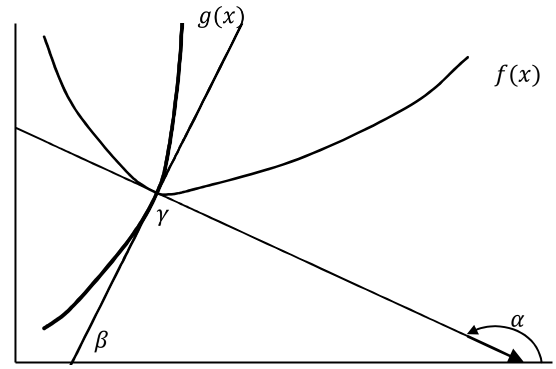
$$C = 25$$

La ecuación que se pide es

$$x^2 + y^2 = 25$$

TRAYECTORIAS ISOGONALES Y ORTOGONALES

En la figura se tiene $\alpha = \beta + \gamma$, luego $\gamma = \alpha - \beta$, donde γ es el ángulo formado por la tangente y el punto de intercepción



Dada una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$, existe otra familia $g(x, y, c) = 0$, que corta la familia f bajo un mismo ángulo γ. A la familia g se le llama familia de trayectorias isogonales de f y $g(x, y, c) = 0$ es solución de la ecuación diferencial

$$tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha tan\beta} = \frac{f'(x) - y'}{1 + f'(x)y'}$$

Ejemplo 10. Hallar las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y(x + C) = 1$

Solución. De acuerdo con lo expuesto:

$$tan45 = \frac{f'(x) - y'}{1 + f'(x)y'} = 1$$

Por su parte derivando implícitamente a $y(x + C) = 1$ no queda:

$$y + (x + C)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + C}$$

Reemplazando en la ED no queda:

$$\frac{-\frac{y}{x + C} - y'}{1 + \left(-\frac{y}{x + C}\right)y'} = 1$$

$$\frac{-\frac{y}{\frac{1}{y}} - y'}{1 + \left(-\frac{y}{\frac{1}{y}}\right)y'} = 1$$

$$\frac{-y^2 - y'}{1 - y^2y'} = 1$$

$$-y^2 - y' = 1 - y^2 y'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{y^2+1}$$

$$\frac{y^2-1}{y^2+1}dy = dx$$

$$\int \left(1 - \frac{2}{y^2+1}\right) dy = \int dx$$

$$y - 2tan^1 y = x + C$$

Que representa la familia de trayectorias isogonales pedidas

APLICACIONES A LA DINÁMICA

Ejemplo 11. Hallar las leyes que rigen el movimiento de un punto que se mueve en línea recta con aceleración constante.

Solución general. La aceleración se define como:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Separando variables: $dv = adt$, por lo tanto

$$\int dv = a \int dt + C$$

$$v = at + C$$

Solución particular. Analicemos las condiciones iniciales de una partícula que se mueve en línea recta con aceleración constante. Para un instante $t = 0$, la velocidad inicial sería $v = v_0$ y la distancia recorrida $x = x_0$. Por lo tanto:

$$v = at + C$$

$$v_0 = a(o) + C$$

$$C = v_0$$

Para este caso la velocidad de la partícula es:

$$\boldsymbol{v = at + v_0}$$

Por otro lado sabemos además, que $v = \frac{dx}{dt}$, sustituyendo esta relación en la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = at + v_0$$

Separando variables: $dx = atdt + v_0 dt$ por lo tanto

$$\int dx = a \int tdt + v_0 \int dt + C$$

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C$$

De acuerdo con el análisis anterior:

t	v	x
0	v_0	x_0

$$x_0 = \frac{a(0)^2}{2} + v_0(0) + C$$

$$C = x_0$$

Para este caso la distancia recorrida por la partícula sería:

$$\boldsymbol{x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0}$$

Pensemos ahora en un movimiento de caída libre donde $a = g$, $v_0 = 0$, $x_0 = 0$, $x = h$, entonces:

$$\boldsymbol{v = gt}, \qquad \boldsymbol{h = \frac{gt^2}{2}}$$

Eliminado a t en ambas ecuaciones tenemos:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gt}}$$

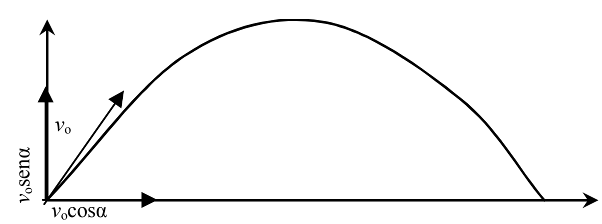
Ejemplo 12. Estudiar el movimiento de un proyectil que tiene una velocidad inicial v_0, siendo α el ángulo de tiro, despreciando la resistencia del aire y que sólo la fuerza de gravedad influye en el proyectil.

Solución. Para este caso la aceleración será cero en el sentido horizontal y $-g$ en el sentido vertical, por lo tanto:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

Resolviendo las ecuaciones

$$v_x = C_1 \qquad \text{y} \qquad v_y = -gt + C_2$$



$v_0 cos\alpha$ = componente horizontal de la velocidad inicial

$v_0 sen\alpha$ = componente vertical de la velocidad inicial

Luego:

$$C_1 = v_0 cos\alpha$$
$$C_2 = v_0 sen\alpha$$

$$\boldsymbol{v_x = v_0 cos\alpha} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_y = -gt + v_0 sen\alpha}$$

Por otro lado sabemos, que $v_x = \frac{dx}{dt}$ y $v_y = \frac{dy}{dt}$, sustituyendo esta relación en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} == -gt + v_0 sen\alpha$$

Separando variables:

$$dx = v_0 cos\alpha dt \quad \text{y} \quad dy = -gtdt + v_0 sen\alpha\, dt$$

Integrando tenemos:

$$x = v_0 t cos\alpha + C_3 \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t sen\alpha + C_4$$

Se puede deducir las siguientes condiciones iniciales:

t	x	y
0	0	0

Sustituyendo estos valores tenemos que

$$C_3 = 0 \quad \text{y} \quad C_4 = 0$$

Con lo que las ecuaciones se reducen a:

$$\boldsymbol{x = v_0 t cos\alpha} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t sen\alpha}$$

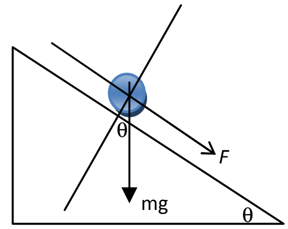
Eliminado a t nos queda:

$$\boldsymbol{y = xtan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}}$$

Ejemplo 13. Un cuerpo que se desliza hacia abajo sobre cierto plano inclinado está sujeto a una aceleración de 1.2 m/s^2. Si se pone en movimiento hacia arriba en un plano con velocidad de 1.8 m/s

a. A qué distancia llega en t segundo.
b. A qué distancia legará antes de deslizarse hacia atrás

Solución. El modelo consta de dos partes. La primera que nos dice que el cuerpo se desliza hacia abajo. Lo que significa que el movimiento es producto de su masa y del ángulo del plano inclinado.



Sabemos por la segunda ley de Newton que:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

Y de acuerdo con el diagrama

$$F = mgsen\theta$$

$$mgsen\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$gsen\theta = 1.2$$

$$\theta = arcsen\frac{1.2}{9.8} = 7°$$

La segunda parte del problema el objeto va hacia arriba. Aprovechando el análisis anterior sabemos que

$$gsen\theta = \frac{dv}{dt}$$

$$\int dv = gsen\theta \int dt + C$$

$$v = gsen\theta t + C$$

$$Para\ t = 0,\ v_0 = 1.8; \quad 1.8 = gsen\theta(o) + C$$

$$C = 1.8$$

Luego entonces,

$$\frac{dx}{dt} = -gtsen\theta + 1.8$$

$$dx = -gsen\theta \int tdt + 1.8\int dt + C$$

$$x = -\frac{gsen\theta}{2}t^2 + 1.8t + C$$

Inicialmente cuando $t = 0,\ x = 0,\ luego\ C = 0$

$$x = -\frac{gsen\theta}{2}t^2 + 1.8t$$

Para hallar la máxima distancia recorrida hallamos la primera derivada con respecto a t de esta función y la igualamos a cero (para hallar máximo):

$$\frac{dx}{dt} = -gsen\theta t + 1.8 = 0$$

$$t = \frac{-1.8}{-9.8sen7} = 1.51seg$$

Reemplazando este valor en la función.

$$x = -\frac{9.8sen7}{2}(1.51)^2 + 1.8(1.51) = 1.36\, m$$

Ejemplo 14. Una pelota se lanza desde el suelo hacia arriba. En un segundo llega hasta la altura de 25 m. cuál será la máxima altura alcanzada.

Solución. Como es la pelota lleva dirección contraria a la gravedad y el movimiento es sobre el eje y, entonces:

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

Donde v es la velocidad, t el tiempo empleado y g es la gravedad.

$$\int dv = -g\int dt + C$$

$$v = -gt + C$$

Para $t = 0, \quad v = v_0, \quad y = 0, \quad C = v_0$

$$\frac{dy}{dt} = v = -gt + v_0$$

$$dy = -gtdt + v_0dt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + C$$

Para $t = 0, \quad y = 0, \quad C = 0$

Por lo tanto:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t$$

Si $t = 1s, \quad y = 25m, \quad g = 9.8m/s^2$

$$25 = -4.9(1)^2 + v_0(1)$$

$$y = -4.9t^2 + 20.1t$$

Derivando con respecto a t e igualando a cero para hallar la altura máxima:

$$\frac{dy}{dt} = -9.8t + 20.1 = 0$$

$$t = \frac{-20.1}{-9.9} = 2.05\, seg$$

Reemplazando a t en la función:

$$y = -4.9t^2 + 20.1t$$

$$y = -4.9(2.05)^2 + 20.1(2.05)$$

$$y = 20.1$$

EJERCICIOS 2

Integrar las ecuaciones

1. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$
2. $(1+y^2)dx+xydy=0$
3. $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$
4. $(1+y^2)dx=xdy$
5. $x\sqrt{1+y}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
6. $e^{-y}(1+y')=1$
7. $ylnydx+xdy=0,\ para\ y_{(1)}=1$
8. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$
9. $(1+e^x)yy'=e^y,\ \ para\ y_{(0)}=0$
10. $(xy^2-y^2+x-1)dx+(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2)dy=0$
11. $y'=sen(x-y)$
12. $(x^2y^2+1)dx+2x^2dy=0\ \ (sutituya\ xy=t)$
13. $(1+x^2y^2)y+(xy-1)^2xy'=0\ \ (sutituya\ xy=t)$
14. Hallar una curva que pase por el punto (0, -2), de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces.
15. Hallar las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y=Ce^{ax}$, donde c y a son constantes.
    R/ $y+\frac{2}{a}\ln(ay-1)=x+C$
16. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $y^2=Cx^3$
    R/ $2x^2+3y^2=C$
17. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas equiláteras $xy=C$
    R/$x^2-y^2=C$
18. Determinar la curva que pasa por $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ y corta a cada miembro de la familia $x^2+y^2=C$ formando un ángulo de 60°.
    R/$\sqrt{3}tan^{-1}\frac{x}{y}=\pm\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)+\sqrt{3}tan^{-1}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}ln\frac{5}{2}$
19. Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y=Cx^2$
    R/ $\frac{x^2}{2}+y^2=C$
20. Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y=Ce^{-x}$
    R/ $\frac{y^2}{2}=x+C$
21. Encuentre la curva que pertenece a la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x+y=Ce^y$ y que pasa por (0; 5)
    R/ $y=2-x+3e^{-x}$
22. Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad de que el punto de tangencia es punto medio del segmento tangente entre los ejes coordenados.
    R/ $xy=C$
23. Empleando coordenadas rectangulares hallar la forma del espejo curvado tal que la luz de una fuente situada en el origen se refleje en él como un haz de rayos paralelos al eje x.
    (R/ $y^2=2Cx+C^2$
24. Una curva pasa por el origen en el plano XY, al primer cuadrante. El área bajo la curva de (0; 0) a (x; y) es un tercio del área del rectángulo que tiene esos puntos como vértices opuestos. Encuentre la ecuación de la curva.
    (R/ $y=Cx^2$
25. Encontrar las curvas para las cuales la tangente en un punto P($x;\ y$) tiene interceptos sobre los ejes x y y cuya suma es 2($x+y$)
    R/ $xy=C$
26. Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 millas/hora en el momento de agotarse el combustible; si el agua se opone al movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si en una milla de recorrido reduce su velocidad a 30 millas/hora. ¿A qué distancia se detendrá?

    R/ 2 millas
27. En el interior de la tierra la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia del centro, si se perfora un orificio que atraviese la tierra de polo a polo y se lanza una piedra en el orificio con velocidad v_0, ¿con qué velocidad llegará al centro?

    R/ $v=\sqrt{gR+v_0^2}$, donde R es el radio de la tierra.

28. Una bala se introduce en una tabla de $h = 10\ cm$ de espesor con la velocidad $v_0 = 200\ m/s$ traspasándola con la velocidad $v_1 = 80\ m/s$. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo del movimiento de la bala por la tabla.

R/ $t = \frac{h_0(v_1 - v_0)}{v_1 v_0 \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)} = \frac{3}{4000 ln 2.5} seg$

29. Una cadena de 4 pies de longitud tiene 1 pie de longitud colgando del borde de una mesa. Despreciando el rozamiento, hallar el tiempo que tarda la cadena en deslizarse fuera de la mesa.

R/ $t = \sqrt{\frac{4}{g}} ln\left(4 + \sqrt{15}\right) seg$

30. Un punto material de masa un gramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo calculado desde el instante $t=0$ e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t=10\ seg.$, la $v=50\ cm/seg$ y la $f=4$ dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto desde el comienzo del movimiento?

R/ $\mathrm{v} = \sqrt{72500}\ \mathrm{cm/seg} = 269{,}3\ \ \mathrm{cm/seg}$

31. Un barco retrasa su movimiento por acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es *10mt/seg*, después de *5seg* su velocidad será *8mt/seg*. Después de cuánto tiempo la velocidad será *1mt/seg*?

R/ $t = -5\frac{\ln 10}{\ln 0{,}8}\ \mathrm{seg}$

32. Un cuerpo de masa M se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la velocidad del cuerpo alcance el 80% de su velocidad límite.

R/ $\mathrm{y} = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{K}} \ln 0{,}2$