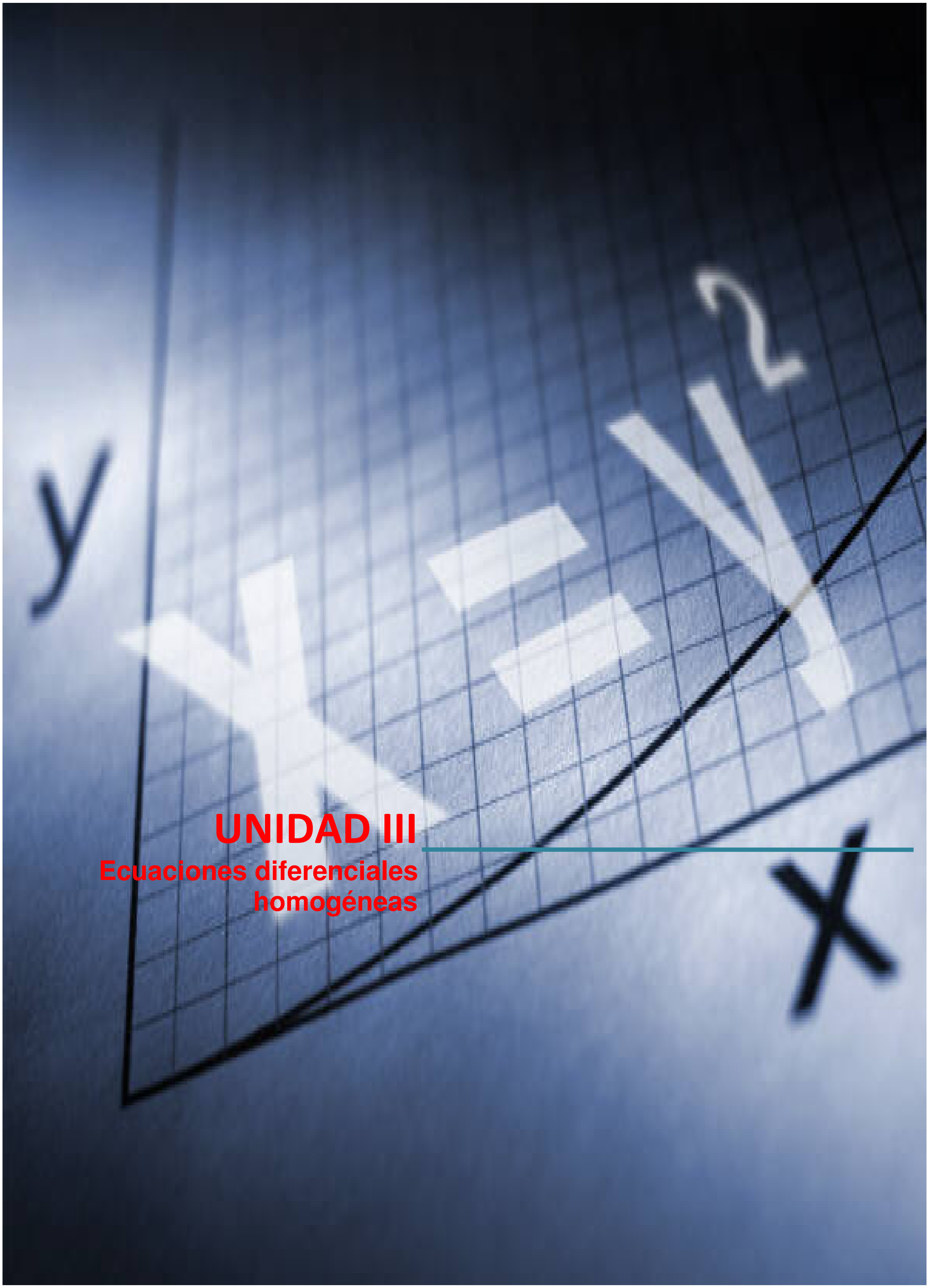

# UNIDAD III

## Ecuaciones diferenciales homogéneas

# UNIDAD 3

## ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

**Funciones homogénea.** Una función $f(x,y)=0$, e homogénea de grado n en sus argumentos si cumple:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

***Ejemplo 1***. Probar si la siguiente función es homogénea.

$$f(x,y)=x^2-y^2-xy$$

*Solución.* Reemplazando:

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-(\lambda y)^2-(\lambda x)(\lambda y)$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(x^2-y^2-xy)$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y)$$

Es una función homogénea de segundo grado

***Ejemplo 2***. Probar si la siguiente función es homogénea.

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

*Solución.* Reemplazando:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\cancel{\lambda^2}(x^2-y^2)}{\cancel{\lambda^2}(x^2+y^2)}$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Es una función homogénea de grado cero

**Ecuaciones diferenciales homogénea** se dice que la ecuación diferencial

$$Mdx+Ndy=0$$

Es homogénea cuando M y N son funciones homogéneas de $x$ y $y$ del mismo grado.

Si la ecuación diferencial es de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, es homogénea si $f(x,y)$ es homogénea de grado cero.

Las ecuaciones diferenciales homogéneas pueden resolverse haciendo la sustitución:

$$y=vx$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

***Ejemplo 3***. Resolver la ecuación.

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$$

*Solución.* Reduciendo a la forma general

$$y^2dx+(x^2-xy)dy=0$$

$M=y^2$ y $N=x^2-xy$. Ambas son homogéneas y de segundo grado, siendo:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$$

Reemplazando a $y=vx$ y derivando tenemos:

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{(vx)^2}{x(vx)-x^2}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2}{v-1}$$

$$vdx+xdv=\frac{v^2}{v-1}dx$$

$$xdv=\left(\frac{v^2}{v-1}-v\right)dx$$

$$xdv=\left(\frac{v^2-v^2+v}{v-1}\right)dx$$

$$\left(\frac{v-1}{v}\right)dv=\frac{dx}{x}$$

$$dv-\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$$

$$v + C - lnv = lnx$$

$$v + C = lnx\frac{y}{x}$$

$$y = e^{v+C}$$

$$y = e^{\frac{y}{x}+C}$$

$$y = e^{\frac{y}{x}}e^{C}$$

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

***Ejemplo 4***. Resolver la ecuación.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

*Solución.* Haciendo la sustitución

$$y' = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{\cancel{\lambda}^2(x^2 + y^2)}{\cancel{\lambda}^2 xy}$$

Por lo tanto la ecuación es homogénea; por ello, reemplazando a $y = vx$ y derivando tenemos:

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{v} + \cancel{v}$$

$$vdv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^2}{2} + C = lnx$$

$$\frac{y^2}{2x^2} + C = lnx$$

$$y^2 + 2Cx^2 = x^2lnx^2$$

$$y^2 + 2x^2 = x^2lnx^2$$

**Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas.** El caso más común de ecuaciones reducibles a homogéneas es el que tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Donde $a_1, b_{1,}, c_1, a_2, b_2, c_2$ son constantes dadas y $a_2, b_2, c_2$ no son simultáneamente cero.

Las ecuaciones de esta forma pueden resolverse por transformación, hay dos casos que pueden ser considerados:

***i.*** Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

La transformación para reducirla a homogénea es:

$$x = u + h, \quad y = v + k, entonces$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

Siendo $(h,\ k)$ la solución del sistema lineal:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

***ii.*** Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Quiere decir que las rectas no son paralelas y el sistema no tiene solución; en este caso la sustitución conveniente es:

$$x = u, \quad v = \frac{a_1x + b_1y}{a_1} = \frac{a_2x + b_2y}{a_2}, entonces$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

***Ejemplo 5***. Resolver la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{x + y - 5}$$

*Solución.* Es una ecuación reducible a homogénea, por lo tanto probemos si pertenece a *i* o *ii*:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-1)(1) \neq 0$$

La solución del sistema:

$$\begin{array}{rcl} x - y + 3 & = & 0 \\ x + y - 5 & = & 0 \\ \hline 2x + 0 - 2 & = & 0 \end{array}$$

$$x = 1; \quad y = 4$$

La transformación para reducirla a homogénea es:

$$x = u + 1, \quad y = v + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

Y la ecuación quedaría

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + 1 - v - 4 + 3}{u + 1 + v + 4 - 5} = \frac{u - v}{u + v}$$

La cual es una ecuación homogénea, por ello, reemplazando a $v = zu$,

$$\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du} = \frac{\frac{u}{u} - \frac{v}{u}}{\frac{u}{u} + \frac{v}{u}} = \frac{1 - z}{1 + z}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1 - z}{1 + z} - z = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}$$

$$\frac{1 + z}{1 - 2z - z^2}dz = \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - 2z - z^2) = lnu + lnC$$

$$\ln(1 - 2z - z^2) = -2lnu + lnC$$

$$\ln(1 - 2z - z^2) + lnu^2 = lnC$$

$$\ln\left(1 - 2\frac{v}{u} - \frac{v^2}{u^2}\right)u^2 = lnC$$

$$\ln\left(\frac{u^2 - 2vu - v^2}{\cancel{u}^2}\right)\cancel{u}^2 = lnC$$

$$\cancel{\ln}(u^2 - 2vu - v^2) = \cancel{ln}C$$

$$(x - 1)^2 - 2(y - 4)(x - 1) - (y - 4)^2 = C$$

$$x^2 + 6x - 2xy + 10y - y^2 = C$$

## CRECIMIENTO Y DESCOMPOSICIÓN

Existen en el mundo físico, en biología, medicina, demografía, economía, etc. cantidades cuya rapidez de crecimiento o descomposición varía en forma proporcional a la cantidad presente, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

***Ejemplo 6***. Suponga que usa pentobarbitol sódico para anestesiar a un perro. El perro queda anestesiado cuando la concentración en su corriente sanguínea es por lo menos de 45 miligramos (mg) de pentobarbitol por kilogramo de peso del perro. Suponga también que el pentobarbitol sódico es eliminado de la corriente sanguínea del pero en forma exponencial, con vida media de 5 horas ¿Qué dosis simple debe ser administrada para tener anestesiado por una hora a un perro de 50 kg?

*Solución.* Como el medicamento es eliminado de la corriente sanguínea del perro en forma exponencial, la ecuación diferencial que describe la tasa instantánea de disminución del medicamento, $\frac{dQ}{dt}$ para una cantidad presente de medicamento M al tiempo t en horas, está dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

Separando variables y aplicando integral

$$\int\frac{dQ}{Q} = -k\int dt + C$$

Integrando:

$$LnQ = -kt + C$$

$$Q = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^C$$

$$Q = Ce^{-kt}$$

Si $Q_0$ es la cantidad de medicamento aplicado en t = 0 y como el medicamento tiene una vida media útil de 5 horas, la mitad del medicamento se eliminará de la corriente sanguínea en ese tiempo, entonces:

| t | 0 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|
| $Q$ | $Q_0$? | $\frac{Q_0}{2}$ | 2250 |

$$Q_0 = Ce^{-k(0)}$$

$$Q_0 = C$$

Por lo tanto la ecuación quedaría:

$$Q = Q_0e^{-kt}$$

Para los 5 años:

$$\frac{\cancel{Q_0}}{2} = \cancel{Q_0}e^{-5k}$$

$$ln\frac{1}{2} = -5k$$

$$k = \frac{ln\frac{1}{2}}{-5} = 0{,}1386294361$$

La ecuación quedaría:

$$Q = Q_0 e^{-0{,}1386294361t}$$

Se sabe que el perro pesa 50 kg, y por cada kilogramo de peso, al perro debe tener en la su corriente sanguínea 45 mg de medicamento para que se encuentre anestesiado, entonces 50×45 = 2250 mg es la mínima cantidad que aún debe tener en una hora, por lo tanto:

$$Q = Q_0 e^{-0{,}1386294361t}$$

$$2250 = Q_0 e^{-0{,}1386294361(1)}$$

$$Q_0 = 2584.571299$$

Para que el perro quede anestesiado por una hora, es decir, para que la cantidad de droga esté por encima de los 2250 mg en el lapso de una hora, se debe aplicar una dosis aproximada de 2585 mg de pentobarbitol sódico

**Desintegración radioactiva:** Si Q es la cantidad de material radioactivo presente en el instante t, entonces la tasa de desintegración respecto al tiempo $\frac{dQ}{dt}$ es proporcional Q, de tal modo que la ecuación diferencial que describe cuantitativamente este fenómeno es: $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, donde k es la constante de desintegración y el signo negativo indica que el material va disminuyendo.

Se llama tiempo de vida media de un material radioactivo al tiempo necesario para que una cantidad $Q_0$ se trasforme en $\frac{Q_0}{2}$

***Ejemplo 7***. El carbono extraído de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del carbono 14 ($C^{14}$) extraído de un hueso en los tiempos actuales ¿Cuál es la antigüedad del cráneo?
(Nota: Para $C^{14}$ el valor aproximado de $k$ es 0,0001216)

*Solución.* El ejemplo obedece al modelo de desintegración radioactiva, por lo tanto:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

$$\frac{dQ}{dt} = -0{,}0001216Q$$

Separando variable y aplicando integral tenemos:

$$\int \frac{dQ}{Q} = -0{,}0001216 \int dt + C$$

Integrado no queda:

$$lnQ = -0{,}0001216t + C$$

$$Q = e^{-0{,}0001216t+C} = e^{-0{,}0001216t} e^{C}$$

$$Q = Ce^{-0{,}0001216t}$$

Si $Q_0$ es la cantidad de $C^{14}$ presente en el cráneo antiguo y Q la cantidad presente en el hueso actual, entonces:

| t | 0 | $t_{(hoy)}$ |
|---|---|---|
| Q | $Q_0$ | $6Q_0$ |

$$Q_0 = Ce^{-0{,}0001216(0)}$$

$$Q_0 = C$$

Por lo tanto la ecuación quedaría:

$$Q = Q_0 e^{-0{,}0001216t}$$

Para determinar la antigüedad del hueso hacemos:

$$6\cancel{Q_0} = \cancel{Q_0} e^{-0{,}0001216t}$$

$$ln6 = -0{,}0001216t$$

$$t = \frac{ln6}{-0{,}0001216}$$

$$t \approx -14735$$

El cráneo estudiado debe tener una antigüedad aproximada de 14.735 años.

**Ley de enfriamiento de Newton:** Según la ley de Newton, si se tiene un cuerpo a una temperatura T, sumergido en un medio de tamaño infinito de temperatura $T_m$ ($T_m$ no varía apreciablemente con el tiempo), el enfriamiento de este cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura T y la temperatura $T_m$ del medio. $\frac{dT}{dt} = -kT$, donde $T = T - T_m$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

***Ejemplo 8***. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 5 minutos desde 70°C hasta 60°C, ¿Cuál será la temperatura transcurrido 30 minutos?

*Solución.* De acuerdo con la ley de Newton la velocidad de enfriamiento viene dada por:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Separando variables:

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = -k \int dt + C$$

$$Ln(T - T_m) = -kt + C$$

Para $t_0$ =0, la temperatura es 70°C entonces:

| | | | |
|---|---|---|---|
| t | 0 | 5 | 30 |
| $T_m$ | 20 | 20 | 20 |
| T | 70 | 60 | T? |

$$Ln(T - T_m) = -kt + C$$

$$Ln(50) = -k(0) + C$$

$$C = ln50$$

Por lo tanto, la ecuación general queda:

$$Ln(T - T_m) = -kt + ln50$$

A los 5 minutos:

$$Ln(40) = -k(5) + ln50$$

$$k = \frac{ln50 - ln40}{5} = 0{,}044$$

$$Ln(T - T_m) = -0{,}044t + ln50$$

A los 30 minutos:

$$Ln(T - 20) = -0{,}0446(30) + ln50$$

$$T - 20 = e^{2{,}57}$$

$$T = e^{2{,}57} + 20 = 33$$

$$T = 33°C$$

Dentro de 30 minutos la temperatura del cuerpo es de 33°C

**Ley de absorción de Lambert:** Esta ley dice que la tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad $x$ de un material translucido es proporcional a la intensidad de la luz a una profundidad $x$; es decir, si $I$ es la intensidad de la luz a una profundidad $x$, entonces

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

**Crecimiento de Cultivos de Bacterias o Crecimientos poblacionales:** La razón de crecimiento depende de la población presente en periodo de procrear, considerando las tasas de natalidad y de muerte, el modelo que representa dicha situación es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

donde Q representa la población en el instante t.

***Ejemplo 9***. Cierta ciudad tenía una población de 25.000 habitantes en 1975 y una población de 30.000 habitantes en 1985. Suponiendo que su población continúe creciendo exponencialmente con un índice constante, ¿qué población pueden esperar los urbanistas que tenga la ciudad en el año 2015?

*Solución.* De acuerdo con el enunciado del problema corresponde a un ejemplo clásico de crecimiento exponencial, cuya ED es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

Separando variables:

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int kdt + C$$

$$lnQ = kt + C$$

$$Q = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}$$

Por lo tanto, la ecuación general sería:

$$Q = Ce^{kt}$$

Si tomamos a 1975 como $t_0$ =0, entonces:

| Año | 1975 | 1985 | 2015 |
|---|---|---|---|
| t | 0 | 10 | 40 |
| Q | 25.000 | 30.000 | ? |

*i.* Reemplazando valores iniciales tenemos:

$$Q = Ce^{kt}$$
$$25000 = Ce^{k(0)}$$
$$C = 25000$$

Sustituyendo el valor de C en la ecuación, nos queda:

$$Q = 25000e^{kt}$$

*ii.* Reemplazando los valores para 1985:

$$Q = 25000e^{kt}$$
$$30000 = 25000e^{k(10)}$$
$$e^{10k} = \frac{6}{5}$$
$$10k = \ln(1,2)$$
$$k = \frac{\ln(1,2)}{10} \approx 0.018232$$

Sustituyendo el valor de $k$ en la ecuación, nos queda:

$$Q = 25000e^{0.018232t}$$

*iii.* Determinar el valor de Q para 2015:

$$Q = 25000e^{0.018232t}$$
$$Q = 25000e^{0.018232(40)}$$
$$Q \approx 51.840$$

Para el aña 2015 se espera tener una población de 51.840 personas

**Interés compuesto:** El monto de dinero en una cuenta bajo interés compuesto continuo crece proporcionalmente a la cantidad de dinero presente en la cuenta en un momento determinado. De tal manera que la ecuación diferencial asociada a este hecho, está dada por:

$$\frac{dM}{dt} = kM$$

donde M representa el monto en el instante t, y $k$ es el interés porcentual.

***Ejemplo 10***. Cuando nació su primer hijo una pareja depositó en una cuenta de ahorros US$ 5.000, bajo interés compuesto continuo al 8%. Se dejo que se acumularan los intereses devengados ¿A cuánto ascenderá la cuenta en el decimoctavo cumpleaños del niño?

*Solución.* Es un caso típico de interés compuesto continuo, por lo tanto la E.D. es:

$$\frac{dM}{dt} = kM$$
$$\frac{dM}{dt} = 0,08M$$

Separando variables e integrando:

$$\int \frac{dM}{M} = 0,08\int dt + C$$
$$lnM = 0,08t + C$$
$$M = e^{0,08t+C} = e^{0,08t}e^{C}$$

Por lo tanto, la ecuación general sería:

$$M = Ce^{0,08t}$$

Si tomamos el momento de abrir la cuenta como $t_0$ =0, entonces:

| | | |
|---|---|---|
| t | 0 | 18 |
| M | 5.000 | ? |

Reemplazando en la ecuación anterior tenemos:

$$5000 = Ce^{0,08(0)}$$
$$C = 5000$$

La ecuación quedaría:

$$M = 5000e^{0,08t}$$

Para un t = 18:

$$M = 5000e^{0,08(18)} = 21103$$

Cuando el joven cumpla 18 años de edad, la cuenta ascenderá a US$ 21.103 aproximadamente.

**EJERCICIOS 3**

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

2. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

3. $y' = -\frac{x+y}{x}$

4. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$

5. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

6. $y' = \frac{x-y}{x+y}$

7. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

8. $\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right) dx - xdy = 0$

9. $2(x+y)dx - ydy = 0$

   $sol.$ $\frac{1}{2}ln(2x^2 + 2xy + y^2) - \arctan\left(\frac{x+y}{x}\right) = C$

10. $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$

    $sol.$ $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$

11. $(2x + y)dx + (x + 3y)dy = 0$

    $sol.$ $2x^2 + 2xy + 3y^2 = C$

12. $\sqrt{1+4t^2}ds + 2\sqrt{1-s^2}dt = 0$

    $sol.$ $s\sqrt{1-4t^2} + 2t\sqrt{1-s^2} = C$

13. $2xdz - 2zdx = \sqrt{x^2 + 4z^2}dx$

    $sol.$ $1 + 4Cz - C^2x^2 = 0$

14. $\frac{du}{dv} = \frac{1+u^2}{1+v^2}$

    $sol.$ $u = \frac{u+C}{1-Cv}$

15. $(3 + 2y)xdx + (x^2 - 2)dy = 0$

16. $(x - 2y)dx - (2x + y)dy = 0$

17. $(3x + 2y)dx + xdy = 0$

18. $(x^2 + y^2)dx - (2xy + y^2)dy = 0$

19. Un punto material de masa igual 1 kilogramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante t = 0, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante t = 10 s la velocidad era igual a 50 cm/s, y la fuerza igual a 4 dinas. ¿qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

20. Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es de 10 m/s, después de 5 s su velocidad será de 8 m/s. ¿después de cuánto tiempo la velocidad será de 1 m/s?

21. Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura $T_0$ del aire. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 min desde 100°C hasta 60°C ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?

22. Una pared de ladrillos tiene 30 cm de espesor. Hallar la dependencia de la temperatura de la distancia del punto hasta el borde exterior de la pared, si la temperatura en la superficie interior de la misma es igual a 20°C y en la exterior 0°C. Hallar la cantidad de calor expedida por la pared (por $m^2$) al exterior durante un día

    Nota: Según la Ley de Newton, la velocidad Q de propagación de calor a través de una superficie A, perpendicular al eje OX, es: $q = -kS\frac{dT}{dt}$, donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica; T, la temperatura; t, el tiempo y S, el área de la superficie A; $(k = 0.0015)$

23. Si T es el tiempo de vida media, mostrar que:

$$Q = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

24. Suponga que un elemento radioactivo A se descompone en un segundo elemento radioactivo B y este a su vez se descompone en un tercer elemento radioactivo C. Si la cantidad de A presente inicialmente es $x_0$ y las cantidades de A y B son $x$ e $y$ respectivamente en el instante t y si $k_1$ y $k_2$ son las constantes de rapidez de descomposición, hallar $y$ en función de t.

R/ $Si\ k_1 \neq k_2,\ \ y = \dfrac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$

25. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de $C_{14}$. Determinar la edad del fósil, sabiendo que el tiempo de vida media del $C^{14}$ es 5600 años.

    R/ $t \approx 55.800 años$

26. Un cuerpo se calienta a 110°C y se expone al aire libre a una temperatura de 10°C. Si al cabo de una hora su temperatura es de 60°C. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30°C?

    R/ $\mathrm{t} = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$

27. En agua limpia la intensidad $\mathrm{I}$ a 3 pies bajo la superficie es de un 25% de la intensidad $\mathrm{I}_0$ en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

    R/ $\mathrm{I} = \mathrm{I}_0(0{,}25)^5$

28. Si $\mathrm{I}$ a una profundidad de 30 pies es $\frac{4}{9}$ de la intensidad en la superficie; encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies

29. Si en un análisis de una botella de leche se encuentran 500 organismos (bacterias), un día después de haber sido embotelladas y al segundo día se encuentran 8000 organismos. ¿Cuál es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?

30. Una persona de un pueblo de 1000 habitantes regresó con gripa. Si se supone que la gripa se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de agripados como también al número de no agripados. Determinar el número de agripados cinco días después, si se observa que el número de agripados el primer día es 100.

31. Cuando se produce cierto alimento, se estima en N el número de organismos de una cierta clase presentes en el paquete. Al cabo de 60 días el número N ha aumentado a 1000N. Sin embargo, el número 200N es considerado como el límite saludable. A los cuantos días, después de elaborado, vence el alimento.

    R/ 46.02 días

32. En cierto cultivo de bacterias, el número de estas se ha sextuplicado ¿Qué tiempo tarda la población en duplicar su número inicial?

    R/ $t \approx 3h\, 52'$

33. El carbono extraído de una reliquia característica de los tiempos de Cristo contenía $4{,}6 \times 10^{10}$ átomos de $C^{14}$ por gramo. El carbono extraído de un espécimen actual de la misma sustancia contiene $5{,}0 \times 10^{10}$ átomos de $C^{14}$ por gramo. Calcule la edad aproximada de la reliquia (El Manto de Turín) ¿Cuál es su opinión sobre la autenticidad de la reliquia?

    R/ $t \approx 685{,}7 años$

34. La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad del mismo. Se sabe que transcurrido 1600 años queda la mitad de las reservas iniciales de radio. Hallar que tanto por ciento de radio resultará desintegrado cuando pasen 100 años

    R/ $2\%$ *de la cantidad inicial*

35. La cantidad de luz que resulta absorbida al pasar por una capa delgada de agua, es proporcional a la cantidad de luz que cae sobre ella y al espesor de la misma capa. Si al atravesar una capa de agua de 3m de espesor queda absorbida la mitad de la cantidad inicial de luz ¿Qué parte de esta cantidad llegará hasta la profundidad de 30 m?

    R/ $\dfrac{1}{1024}$

36. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C hasta 60°C, ¿Dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?