UNIDAD IV

Ecuaciones diferenciales Lineales

UNIDAD 4

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Se llama ecuación lineal de primer orden a la que es lineal con respecto a la función incógnita y su derivada.

Ecuación diferencial lineal en y. Una ecuación diferencial es lineal en y si tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

Siendo P y Q funciones de x únicamente, o constantes.

Ecuación diferencial lineal en x. Así mismo, la ecuación

$$\frac{dx}{dy}+Hy=J$$

Siendo H y J funciones de y, es una ecuación diferencial lineal.

Técnica de solución de una ecuación diferencial lineal.

Sea la ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

Para integrar hacemos la sustitución:

$$y=uz$$

donde z es una función de x, entonces

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+Puz=Q$$

$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)z=Q$$

Si hacemos a:

$$\frac{du}{dx}+Pu=0,\ \ entonces\quad u\frac{dz}{dx}=Q$$

Por lo tanto:

$$\frac{du}{u}+Pdx=0$$

$$lnu+\int P\,dx=lnk$$

$$ln\frac{u}{k}=-\int P\,dx$$

$$u=ke^{-\int Pdx}$$

Reemplazando en:

$$u\frac{dz}{dx}=Q$$

$$ke^{-\int Pdx}\frac{dz}{dx}=Q$$

$$dz=\frac{Q}{k}e^{\int Pdx}dx$$

$$z=\frac{1}{k}\left(\int Qe^{\int Pdx}\,dx+C\right)$$

Colocando todo en función de x e y tenemos:

$$\frac{y}{u}=\frac{1}{k}\left(\int Qe^{\int Pdx}\,dx+C\right)$$

$$\boldsymbol{y=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}\,dx+C\right)}$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$$

Solución. Adecuando su presentación al modelo:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{5/2}$$

$$P=-\frac{2}{x+1}\qquad\qquad Q=(x+1)^{5/2}$$

P y Q son funciones de x únicamente.

$$\int Pdx = -\int \frac{2}{x+1}dx = -2\ln(x+1)$$

$$\int Pdx = -\ln{(x+1)^2}$$

Reemplazando en y

$$y = e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}\,dx + C\right)$$

$$y = e^{ln(x+1)^2}\left(\int (x+1)^{5/2}e^{ln(x+1)^{-2}}\,dx + C\right)$$

$$y = (x+1)^2\left(\int (x+1)^{5/2}(x+1)^{-2}\,dx + C\right)$$

$$y = (x+1)^2\left(\int (x+1)^{1/2}\,dx + C\right)$$

$$y = (x+1)^2\left(\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + C\right)$$

$$y = \frac{2(x+1)^{7/2}}{3} + C(x+1)^2$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación.

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

Solución. Adecuando la presentación al modelo:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

$$P = 2x \qquad Q = 2xe^{-x^2}$$

P y Q son funciones de x únicamente.

$$\int Pdx = \int 2xdx = x^2$$

Reemplazando en y

$$y = e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}\,dx + C\right)$$

$$y = e^{-x^2}\left(\int 2xe^{x^2}\cdot e^{-x^2}\,dx + C\right)$$

$$y = e^{-x^2}\left(\int 2x\,dx + C\right) = e^{-x^2}(x^2 + C)$$

$$y = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xcosy + sen2y}$$

Solución. Adecuando la ecuación al modelo

$$\frac{dx}{dy} = xcosy + sen2y$$

$$\frac{dx}{dy} - xcosy = sen2y$$

Que corresponde a la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dx}{dy} + Hy = J$$

Siendo: $H = -cosy$ y $J = sen2y$

Para este caso la solución sería:

$$\boldsymbol{x = e^{-\int Hdy}\left(\int Je^{\int Hdy}\,dy + C\right)}$$

Por lo tanto: $\int Hdy = -\int cosy = seny$

$$x = e^{-seny}\left(\int sen2ye^{seny}\,dy + C\right)$$

$$x = Ce^{seny} - 2seny - 2$$

Ecuaciones diferenciales de Bernoulli. Una ecuación diferencial es Bernoulli si:

$$y' + Py = Qy^{\propto}$$

Siendo P y Q funciones de x solamente y $\propto \neq 0$ y $\propto \neq 1$ Esta ecuación se reduce a lineal valiéndose de la sustitución:

$$z = y^{1-\propto}$$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación.

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

Solución. Es una ecuación de Bernoulli

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

En la que ∝ = ½. Por lo tanto:

$$z = y^{1-1/2} = y^{1/2}$$

Derivando:

$$2z\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo

$$2z\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z^2 = xz$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

La cual representa a una ecuación lineal con:

$$P = -\frac{2}{x} \qquad Q = \frac{x}{2}$$

$$\int Pdx = -\int \frac{2}{x}dx = -2lnx = -lnx^2$$

Cuya solución es:

$$z = e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}\,dx + C\right)$$

$$z = e^{lnx^2}\left(\int \frac{x}{2}e^{lnx^{-2}}\,dx + C\right)$$

$$z = x^2\left(\int \frac{x}{2}(x^{-2})\,dx + C\right)$$

$$z = x^2\left(\frac{1}{2}lnx\ + C\right)$$

$$y^{1/2} = x^2\left(\frac{1}{2}lnx\ + C\right)$$

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}lnx\ + C\right)^2$$

VACIADO DE TANQUE

Un tanque de una cierta forma geométrica está inicialmente lleno de agua hasta una altura. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área es A. se abre el orificio y el líquido cae libremente. La razón volumétrica de salida $\frac{dV}{dt}$ es proporcional a la velocidad de salida y el área del orificio, es decir:

$$\frac{dV}{dt} = -kAv$$

Aplicando la ecuación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Por lo tanto:

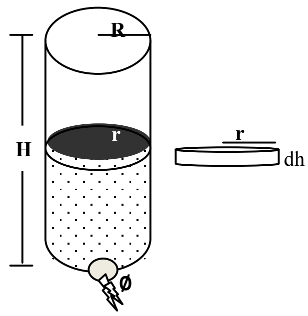
$$\frac{dV}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

Donde $g = 32\ pies/seg^2 = 9{,}8\ m/seg^2$

Cuando no existen datos para determinar el valor de k, podemos usar:

- Si el orificio es de forma rectangular, k = 0,8
- Si el orificio es de forma triangular, 0,65 ≤ k ≤ 0,75
- Si el orificio es de forma circular, k = 0,6

Ejemplo 6. Un cilindro circular de altura H y radio R, dispuesto en forma vertical y con un orificio de diámetro Ø se encuentra lleno de agua. Halle la ecuación diferencial



Solución. Este tipo de problemas es mejor abordarlos por partes así:

Primera parte: el diferencial de volumen de agua en un instante *t*.

$$dV = \pi r^2 dh$$

Como R = r dado a la simetría de la figura

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2\frac{dh}{dt}$$

Segunda parte: considerando el orificio de escape, la cantidad de agua que sale.

$$\frac{dV}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dV}{dt} = -k\pi\left(\frac{\emptyset}{2}\right)^2\sqrt{2gh}$$

Igualando la primera y segunda parte

$$\pi R^2\frac{dh}{dt} = -k\pi\left(\frac{\emptyset}{2}\right)^2\sqrt{2gh}$$

$$R^2\frac{dh}{dt} = -k\left(\frac{\emptyset}{2}\right)^2\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{k\emptyset^2\sqrt{2g}}{4R^2}dt$$

EJERCICIOS 4

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y' = tanxy + cosx$
2. $y' + \frac{1}{x}y = 2$
3. $\frac{dy}{dx} + y = x$
4. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = alnx \cdot y^2$
5. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x$ R/ $y = Cx^2 - 2x$
6. $x\frac{dy}{dx} - 2y = -x$ R/ $y = x + Cx^2$
7. $\frac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x$ R/ $y = x + Ce^{2x}$
8. $x\frac{dy}{dx} - 3y = -2nx$ R/ $y = nx + Cx^3$
9. $\frac{dy}{dx} - y = -2e^{-x}$ R/ $y = e^{-x} + Ce^{x}$
10. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2y^2$ R/ $Cx^2y + 2xy - 1 = 0$
11. $xy' + y = y^2lnx$ R/ $y = \frac{1}{1 + Cx + lnx}$
12. $\frac{dy}{dx} - yctgx + cscx = 0$
13. $2\frac{dy}{dx} + y = (x+1)y^3$
14. $x\frac{dy}{dx} - y = xcosx - senx$
15. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$
16. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0) y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a:

$$\frac{2y + x + 1}{x}$$

$R/2y = 3x^2 - 2x - 1$

17. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1) y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a:

$$\frac{y^2lnx - y}{x}$$

$R/y(1 + lnx) = 1$

18. Un tanque semiesférico tiene un radio de 1 pie; el tanque inicialmente está lleno de agua y el fondo tiene un orificio circular de 1 pulgada de diámetro. Calcular el tiempo de vaciado

$R/112\ seg$

19. Encontrar el tiempo requerido para llenar un tanque cubico de lado tres pies si tiene un orificio circular de una pulgada de diámetro en la base y si entra agua al tanque a razón de π pies^3/min

$R/26\ min, 14seg$

20. Un embudo de 10 pies de diámetro en la parte superior y 2 pies de diámetro en la parte inferior tiene una altura de 24 pies. Si se llena de agua, hallar el tiempo que tarda en vaciarse

$R/14{,}016seg$

21. Un cono circular de radio R y altura H tiene su vértice hacia abajo. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área A es controlada por una válvula y es proporcional a la altura del tanque

en cada instante. Suponiendo que el tanque está lleno de agua, calcular el tiempo de vaciado. Del tiempo de vaciado, que porcentaje es requerido para vaciar la mitad del volumen.

$R/29{,}3\%$

22. La velocidad de salida de agua por un orificio, que se encuentra verticalmente a una distancia h de la superficie libre del líquido, se determina por la formula

$$v = c\sqrt{2gh}$$

Donde c ≈ 0,6 y g es la aceleración de la fuerza de gravedad. ¿Cuánto tiempo tardará en salir el agua que llena una caldera semiesférica de 2 m de diámetro si sale por un orificio redondo que hay en el fondo y que tiene 0,1 m de radio?

$R/35{,}2\ seg$