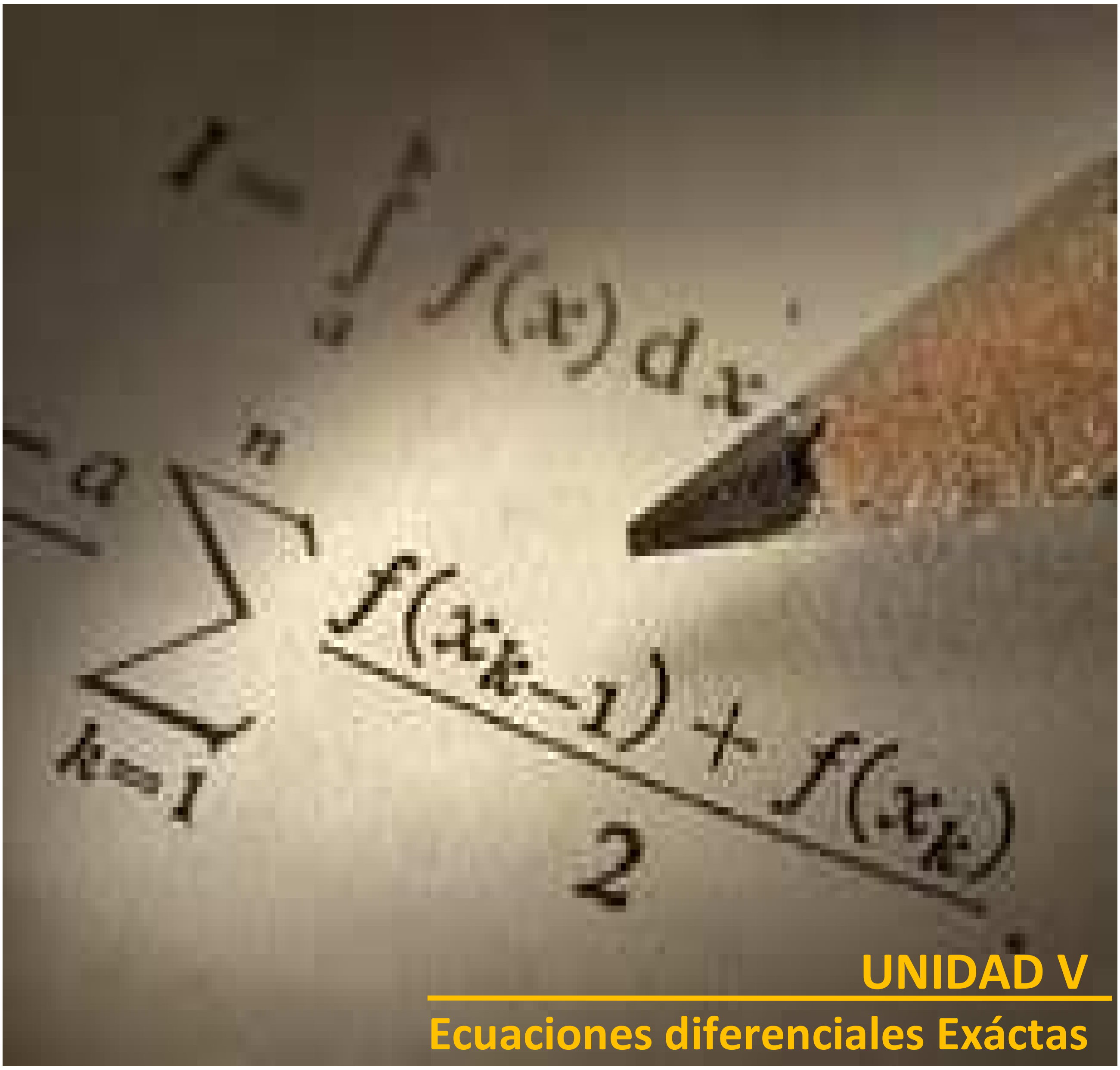


UNIDAD V

Ecuaciones diferenciales Exáctas

UNIDAD 5

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Si para la ecuación diferencial

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Se cumple la igualdad:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

La ecuación se puede escribir de la forma

$$\partial U(x,y) = 0$$

Y se llama ecuación diferencial exacta. La solución general de la ecuación es:

$$U(x,y) = C$$

La función $U(x,y)$, se determina por la formula:

$$U = \int P(x,y)dx + \int Q(x,y)dy$$

Ejemplo 1. Hallar la ecuación diferencial.

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$$

Solución. Es una ecuación diferencial exacta porque:

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial(6x^2y + 4y^3)}{\partial x}$$

Y por consiguiente tiene la forma $dU(x,y) = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$$

De donde:

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + f(y)$$

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + f(y)$$

Derivando a U respecto a y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + f'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$f'(y) = 4y^3$$

$$f(y) = y^4 + C$$

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$$

Siendo la solución de la ecuación diferencial:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

Factor integrante. Si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ no es una ecuación diferencial exacta, existe un $\mu(x,y)$ llamado factor integrante tal que:

$$\mu(Pdx + Qdy) = dU$$

De donde:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Y el factor integrante se puede hallar

1. $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x), \qquad entonces\ \mu = \mu(x)$

2. $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(y), \qquad entonces\ \mu = \mu(y)$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

Solución. De la ecuación se deduce lo siguiente:

$$P = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \quad \wedge \quad Q = x^2 + y^2$$

Hagamos:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$$

Por consiguiente:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=1, entonces\ \mu=\mu(x)$$

Por lo tanto $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ Luego

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}-\mu\frac{\partial Q}{\partial x}=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=1$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=dx$$

$$ln\mu=x,\qquad entonces\quad \mu=e^x$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante tenemos:

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$$

Que es exacta y cuya solución es:

$$ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$(3x^2+2ysen2x)dx+(2sen^2x+3y^2)dy=0$$

Solución De la ecuación se deduce lo siguiente:

$$P=3x^2+2ysen2x\quad ^\wedge\quad Q=2sen^2x+3y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2sen2x\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2(2senxcosx)=2sen2x$$

Es una ecuación diferencial exacta, por lo tanto:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+2ysen2x\quad ^\wedge\quad \frac{\partial U}{\partial y}=2sen^2x+3y^2$$

De donde:

$$U=\int(2sen^2x+3y^2)dy+f(x)$$

$$U=2ysen^2x+y^3+f(x)$$

Derivando a U respecto a x

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2sen2x+f'(x)=3x^2+2ysen2x$$

$$f'(x)=3x^2$$

$$f(x)=x^3+C$$

$$U=2ysen^2x+y^3+x^3+C$$

Siendo la solución de la ecuación diferencial:

$$2ysen^2x+y^3+x^3=C$$

Ejemplo 4. Hallar la solución particular de la ecuación

$$(3x^2y+2xy)dx+(x^3+x^2+2y)dy$$

Solución. Es una ecuación diferencial exacta porque:

$$P=3x^2y+2xy\quad ^\wedge\quad Q=x^3+x^2+2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2x\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+2x$$

Es exacta; por lo tanto:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2y+2xy\quad ^\wedge\quad \frac{\partial U}{\partial y}=x^3+x^2+2y$$

De donde:

$$U=\int(3x^2y+2xy)dx+f(y)$$

$$U=x^3y+x^2y+f(y)$$

Derivando a U respecto a y

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^3+x^2+f'(y)=x^3+x^2+2y$$

$$f'(y)=2y$$

$$f(y)=y^2+C$$

$$U=x^3y+x^2y+y^2+C$$

Siendo la solución de la ecuación diferencial:

$$x^3y + x^2y + y^2 = C$$

APLICACIONES

Ejemplo 5. Un depósito cilíndrico de volumen V_0 está lleno de aire atmosférico, que se comprime de un modo adiabático (sin intercambio de calor con el medio que lo rodea) hasta que el volumen se hace igual a V_1.

Calcular el trabajo invertido durante la comprensión.

Solución. El proceso adiabático se caracteriza por la ecuación de Poisson:

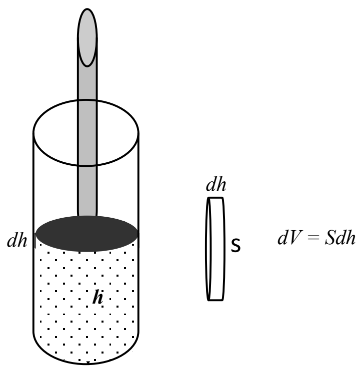
$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k$$

Donde V_0 es el volumen inicial de gas, P_0 es la presión inicial del mismo y k es una magnitud constante para el gas dado.

Designemos a V y P respectivamente, el volumen y la presión del gas en el momento en que el émbolo estaba situado a la altura h, y con S, el área de la superficie del émbolo. Entonces, al descender el émbolo en la magnitud dh, el volumen del gas disminuirá en la magnitud $dV = Sdh$. En este caso se realizará el trabajo (*W*):

$$dW = -PSdh$$

$$dW = -PdV$$



De la ecuación de Poison $P = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k$ y reemplazando en el diferencial de trabajo

$$dW = -PdV$$

$$dW = -P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k dV$$

$$\int dW = -P_0{V_0}^k \int \frac{dV}{V^k} + C$$

$$W = \frac{P_0{V_0}^k}{(k-1)V^{k-1}} + C$$

De acuerdo con las condiciones iniciales $V = V_0$ por consiguiente $W = 0$

$$0 = \frac{P_0{V_0}^k}{(k-1){V_0}^{k-1}} + C$$

$$C = -\frac{P_0V_0}{(k-1)}$$

Por lo tanto, el trabajo e comprensión adiabática es:

$$W = -\frac{P_0V_0}{(k-1)}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1} - 1\right]$$

Ejemplo 6. En un depósito hay 100 litros de disolución acuosa que contiene 10 Kg de sal. En este depósito se vierte agua con una velocidad de 3 litros por minutos y se expulsa mezcla con velocidad de 2 litros por minutos. La concentración se mantiene homogénea removiendo el agua ¿cuánta sal habrá en el depósito una hora después?

Solución. Si se designa a:

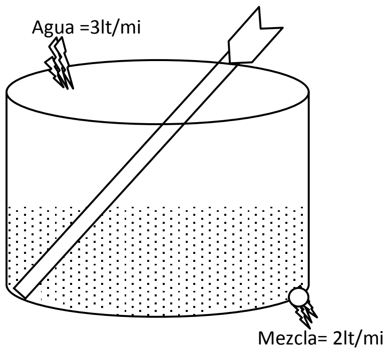
K = Concentración (kg/lt)

X = Cantidad de sustancia (Kg)

V = Volumen de la mezcla (Lt)

Y como el problema garantiza que la mezcla se mantiene homogenea, entonces

$$k = \frac{x}{V};\ \ por\ lo\ tanto\ \ \ x = kV$$



$Llenado\ del\ agua$: $\frac{dV}{dt} = 3\, lt/mi$

$Salida\ de\ mezcla$: $\frac{dV}{dt} = 2\, lt/mi$l

Luego entonces, el volumen del tanque aumenta a razón de $\frac{dV}{dt} = 1\, lt/mi$

Se tiene entonces que, después de transcurrido $t\ minutos$, existe $x\ kg$ de sal y el volumen de la mezcla ha aumentado $V = 100 + t$, luego la concentración ahora es:

$$k = \frac{x}{100 + t}$$

Y la variación de la cantidad de sal viene expresada como:

$$\frac{dx}{dt} = k\frac{dV}{dt}$$

$$-dx = kdv$$

El signo negativo significa que la cantidad de sal va disminuyendo con el tiempo.

$$-dx = \frac{x}{100 + t}dv$$

$$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2dt}{100 + t} + C$$

$$lnx = -2\ln(100 + t) + lnC$$

$$x = \frac{C}{(100 + t)^2}$$

$Para\ t = 0, \quad x = 10$

$$10 = \frac{C}{(100 + 0)^2}$$

$$C = 100.000$$

Con lo que las ecuaciones se reducen a:

$$\boldsymbol{x} = \frac{100.000}{(100 + t)^2}$$

Trascurrido una hora (60 min):

$$\boldsymbol{x} = \frac{100.000}{(160)^2} = 3.90\, kg$$

EJERCICIOS 5

Hallar las Integrales generales de las ecuaciones

1. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

2. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$

3. $(x^2 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$

4. $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

5. $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones, que admiten el factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$ o $\mu = \mu(y)$

6. $(x + y^2)dx + 2xydy = 0$

7. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$

8. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - lnx)dy = 0$

9. En fondo de un depósito, de 300 litro de capacidad, está cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg de sal para 3 litros de agua) y que la cantidad de agua pura dada disuelve 1/3 de kg de sal por minuto, hallar la cantidad de sal que contendría la disolución al cabo de una hora.

10. Cierta cantidad de sustancia, que contiene 3 kg de humedad, se colocó en una habitación de 100 m^3 de volumen, donde el aire tenía al principio el 25% de humedad. El aire saturado a esta temperatura, contiene 0,12 kg de humedad por 1 m^3. Si durante el primer día la sustancia perdió la mitad de su humedad, ¿qué cantidad de humedad quedará al finalizar el segundo día?

    Nota: La humedad contenida en un substancia porosa se evapora al espacio que la rodea con una velocidad que es proporcional a la cantidad de humedad que hay en la substancia y es también proporcional a la diferencia entre la humedad del aire que la rodea y la humedad del aire saturado

11. Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gr/litro, el tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 litros/min y la solución bien homogenizada sale con la misma rapidez. Encontrar el tiempo que transcurrirá hasta que la concentración del colorante en el tanque alcance 1% de su valor original.

    $R/ \quad 460{,}5\ min$