
UNIDAD I
Antiderivada

UNIDAD I

ANTIDERIVADA

Del cálculo diferencial se sabe que la derivada $f'(x)$ de una función dada $f(x)$. Operación que se indica como:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x), \qquad o\ bien\ \ df(x) = f'(x)dx$$

El problema del cálculo integral depende de la operación inversa, es decir:

Dada la diferencial de una función, hallar la función

Concepto. Una antiderivada de una función $f(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$.

Ejemplo 1.

· La derivada de $x^2 + 4$ es $2x$ una antiderivada de $2x$ es $x^2 + 4$

· La derivada de $x^2 + 30$ es $2x$ otra antiderivada de $2x$ es $x^2 + 30$

· En forma parecida, otra antiderivada de $2x$ es $x^2 - 49$.

· En forma general, una antiderivada de $2x$ es $x^2 + C$, donde C se llama constante de integración (positiva, negativa, o cero).

Llamamos al conjunto de todas antiderivadas de una función la *integral indefinida* de la función. Escribimos la integral indefinida de la función *f* como:

$$\int f(x)dx$$

y la leemos como "la integral indefinida de $f(x)$ respecto a x " Por lo tanto, $\int f(x)$dx es una conjunto de funciones; no es una función sola, ni un número. La función f que se está integrando se llama el integrando, la variable x se llama la variable de integración y $\int$ el signo integral.

Algunas Integrales inmediatas.

1. $$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

2. $$\int adu = a\int du$$

3. $$\int dx = x + C$$

4. $$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

5. $$\int \frac{du}{u} = ln\, u + C$$

6. $$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$$

7. $$\int e^u du = e^u + C$$

8. $$\int \sin u\, du = -\cos u + C$$

9. $$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$$

10. $$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

11. $$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$$

12. $$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$$

13. $$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$$

14. $$\int \tan u\, du = -ln \cos u + C = ln \sec u + C$$

15. $$\int \cot u\, du = ln \sin u + C$$

16. $$\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u) + C$$

17. $$\int \csc u\, du = \ln(\csc u + \cot u) + C$$

18. $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{\mathrm{a}} arc \tan\frac{u}{a} + C$$

19. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{u-a}{u+a} + C \qquad u^2 > a^2$

20. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{a+u}{a-v} + C \qquad u^2 < a^2$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\,\text{sen}\frac{u}{a} + C$

22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

23. $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} arc\,\text{sen}\frac{u}{a} + C$

24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

Demostración de la regla 4. Demostremos a 4 como ejemplo, se deja al estudiante a 5, 6 y 7.

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right) = (n+1)\left(\frac{u^{n+1-1}}{n+1}\right)du = u^n du$$

Por definición:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo 2. Utilizando las reglas de integración de la 1 a la 5, resolver las siguientes integrales

a. $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$

b. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{3x^{3/2}}{2} + C$

c. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

d. $\int ax^5 dx = a\int x^5 dx = \frac{ax^6}{6} + C$

e. $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$$

f. $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$$= \int (2ax^{-1/2} - bx^{-2} + 3cx^{2/3})dx$$

$$= \frac{2ax^{1/2}}{1/2} - \frac{bx^{-1}}{-1} + \frac{3cx^{5/3}}{5/3} + C$$

$$= 4a\sqrt{x} - \frac{b}{x} + \frac{9cx^{5/3}}{5} + C$$

g. $\int (a^2 + b^2x^2)^{1/2} x dx$

$La\ derivada\ de\ a^2 + b^2x^2\ \ es\ 2b^2x, si\ tratamos$
$esta\ derivada\ como\ potencia, y\ hacemos\ a$

$$\int (a^2 + b^2x^2)^{1/2} x dx$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int (a^2 + b^2x^2)^{1/2} 2b^2 x dx$$

$$= \frac{(a^2 + b^2x^2)^{3/2}}{3b^2} + C$$

Puedes hacer también

$u = a^2 + b^2x^2; \quad por\ lo\ tanto \quad du = 2b^2xdx$

Sustituyendo estos valores en la integral inicial y resolviendo tenemos:

$$\int u^{1/2}\frac{du}{2b^2} = \frac{u^{3/2}}{3b^2} + C = \frac{(a^2 + b^2x^2)^{3/2}}{3b^2} + C$$

h. $\int \frac{3axdx}{b^2 + c^2x^2}$

Si tomamos el denominador:

$u = b^2 + c^2x^2; \quad du = 2c^2xdx$

Sustituyendo:

$$\int \frac{3axdx}{b^2 + c^2x^2} = \frac{3a}{2c^2}\int \frac{du}{u} = \frac{3a}{2c^2}\ln u + C$$

$$= \frac{3a}{2c^2}\ln(b^2 + c^2x^2) + C$$

i. $\int \frac{x^3}{x+1} dx$

Hagamos la división indicada

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

Sustituyamos en la integral

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C$$

j. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{2x+3}dx$

Hagamos la división indicada

$$\frac{2x-1}{2x+3} = 1 - \frac{4}{2x+3}$$

Sustituyamos en la integral

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = \int \left(1 - \frac{4}{2x+3}\right)dx$$

$$= x - 2\ln(2x+3) + C$$

$$= x - \ln(2x+3)^2 + C$$

Demostración de la regla 14. Demuestre que:

$$\int \tan u\, du = -\ln\cos u + C = \ln\sec u + C$$

Se sabe que:

$$\int \tan u\, du = \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}du, \quad d(\cos u) = -\sin u\, du$$

Aplicando la regla 5 tenemos:

$$\int \tan u\, du = -\int \frac{-\operatorname{sen} u}{\cos u}du$$

$$\int \tan u\, du = -\ln\cos u + C$$

$$\int \tan u\, du = -\ln\frac{1}{\sec u} + C$$

$$\int \tan u\, du = -[\ln 1 - \ln\sec u] + C, \qquad \ln 1 = 0$$

$$\int \tan u\, du = \ln\sec u + C$$

Demostración de la regla 12. Demuestre que:

$$\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u) + C$$

$$\int \sec u\, du = \int \sec u\left(\frac{\sec u + \tan u}{\sec u + \tan u}\right)du$$

$$\int \sec u\, du = \int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u}du$$

$$como \quad d(\sec u + \tan u) = (\sec^2 u + \sec u \tan u)du$$

Y aplicando la regla 5 tenemos:

$$\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u) + C$$

Ejemplo 3. Utilizando las reglas de integración de la 8 a la 17, resolver las siguientes integrales

a. $\displaystyle\int sen\, 2ax\, dx$

Si definimos a:

$u = 2ax,$

$du = 2adx,$

A la integral sólo le falta 2a para aplicar 8.

$$\int \operatorname{sen} 2ax\, dx = \frac{1}{2a}\int (\operatorname{sen} 2ax)2adx$$

$$= -\frac{1}{2a}\cos 2ax + C$$

b. $\displaystyle\int (\tan 2s - 1)^2 ds$

Resolviendo el producto notable.

$$\int (\tan 2s - 1)^2 ds$$

$$= \int (\tan^2 2s - 2\tan 2s + 1)\, ds$$

$$= \int (\tan^2 2s + 1)ds - \int 2\tan 2s\, ds$$

$$= \int \sec^2 2s\, ds - 2\int \tan 2s\, ds$$

Aplicando 10 y 14 respectivamente tenemos

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^2 2s)2ds - \frac{2}{2}\int (\tan 2s)2\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2s + ln\cos u + C$$

c. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$

Multiplicando por la conjugada del denominador.

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \sec x \tan x\, dx$$

Aplicando 10 y 12 respectivamente tenemos

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \tan x - \sec x + C$$

Demostración de la regla 18. Demuestre que:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{\mathrm{a}} \arctan \frac{u}{a} + C$$

$sea: \quad u = a\tan\theta, \quad \tan\theta = \frac{u}{a}, \quad \theta = \arctan\frac{u}{a}$

$por\ lo\ tanto \quad du = a\sec^2\theta\, d\theta \quad \wedge \quad u^2 = a^2\tan^2\theta$

Reemplazando en la integral:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2} d\theta$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(\tan^2\theta+1)} d\theta$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} d\theta$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

Demostración de la regla 19. Demuestre que:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2\mathrm{a}} \ln\frac{u-a}{u+a} + C$$

Descomponiendo a la integral:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \int \frac{du}{(u-a)(u+a)}$$

Si asumimos que el miembro de la derecha se puede dividir en dos partes así:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \int \left(\frac{A}{(u-a)} + \frac{B}{(u+a)}\right) du$$

Para hallar el valor de A y B hacemos:

$$\frac{1}{(u-a)(u+a)} = \frac{A}{(u-a)} + \frac{B}{(u+a)}$$

$$1 = A(u+a) + B(u-a)$$

$si\ u = 0 \Rightarrow \quad aA \quad -aB = 1\ (1)$

$si\ u = 1 \Rightarrow A + aA + B - aB = 1\ (2)$

Restando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, nos queda:

$A + B = 0, si\ multiplicamos\ por\ a \Rightarrow\ aA + aB = 0\ (3)$

$Sumando\ 1\ y\ 3 \quad \Rightarrow \quad 2aA = 1; \quad A = \frac{1}{2a} \quad \wedge \quad B = -\frac{1}{2a}$

Reemplazando estos valores en la integral:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \int \left(\frac{1}{2a(u-a)} - \frac{1}{2a(u+a)}\right) du$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}[\ln(u-a) - \ln(u+a)]$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + C$$

Ejemplo 4. Utilizando las reglas de integración de la 18 a la 22, resolver las siguientes integrales

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+9}$

Si aplicamos la regla 18:

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{(2x)^2+3^2}$$

sea $u = 2x, \quad du = 2dx \ \wedge \ a = 3$

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x)^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3} + C$$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

Si aplicamos la regla 19:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{x^2-2^2}; \quad u = x, du = dx \ \wedge \ a = 2$$

$$= \frac{1}{2(2)}\ln\frac{x-2}{x+2} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2} + C$$

c. $\displaystyle\int \frac{dt}{4-9t^2}$

Si aplicamos la regla 20:

$$\int \frac{dt}{4-9t^2} = \int \frac{dt}{2^2-(3t)^2}$$

sea $u = 3t, \quad du = 3dx \ \wedge \ a = 2$

$$\int \frac{dt}{4-9t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3dt}{2^2-(3t)^2}$$

$$= \frac{1}{3(2\cdot 2)}\ln\frac{2+3t}{2-3t} + C$$

$$= \frac{1}{12}\ln\frac{2+3t}{2-3t} + C$$

d. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}}$

Si aplicamos la regla 21:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{5^2-y^2}}$$

sea $u = y, \quad du = dy \ \wedge \ a = 5$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{y}{5} + C$$

e. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Si completamos cuadrado para obtener una de las formas anteriores:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

Si $u = x+1 \Rightarrow du = dx \ \wedge \ a = 2$

Y aplicamos la regla 18, tenemos que:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

f. $\displaystyle\int \frac{2dy}{\sqrt{2+y-y^2}}$

Completemos cuadrado:

$$\int \frac{2dy}{\sqrt{2+y-y^2}} = \int \frac{2dy}{\sqrt{2+\frac{1}{4}-\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)}}$$

$$= 2\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

sea $u = y - \frac{1}{2} \Rightarrow du = dy \ \wedge \ a = \frac{3}{2}$

Y aplicamos la regla 21, tenemos que:

$$\int \frac{2dy}{\sqrt{2+y-y^2}} = 2\operatorname{arc\,sen}\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2\operatorname{arc\,sen}\frac{2y-1}{3} + C$$

g. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}$

Completemos cuadrado:

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{7}{3}-\frac{4}{9}\right)}$$

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}}$$

$$si \qquad u = x + \frac{2}{3} \Rightarrow du = dx \quad \wedge \quad a = \frac{5}{3}$$

Y aplicamos la regla 19, tenemos que:

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} = \frac{1}{10} \ln \frac{x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}}{x + \frac{2}{3} + \frac{5}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{3x - 3}{3x + 7} + C$$

Ejemplo 5. Utilizando las reglas de integración de la 23 a la 24, resolver las siguientes integrales

a. $\int \sqrt{4 - 9x^2}\ dx$

$$Si \quad u = 3x \Longrightarrow du = 3dx \quad \wedge \quad a = 2$$

Y aplicamos la regla 23, tenemos que:

$$\int \sqrt{4 - 9x^2}\ dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{4 - 9x^2}\ 3dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4 - 9x^2} + 2\text{arc sen}\frac{3x}{2} + C$$

b. $\int \sqrt{3x^2 + 4x - 7}\ dx$

Completemos cuadrado:

$$\int \sqrt{3x^2 + 4x - 7} dx$$

$$= \int \sqrt{3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{7}{3} - \frac{4}{9}\right)} dx$$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}} dx$$

$$Si \quad u = x + \frac{2}{3} \Longrightarrow du = dx \quad \wedge \quad a = \frac{5}{9}$$

Y aplicamos la regla 24, tenemos que:

$$\int \sqrt{3x^2 + 4x - 7} dx$$

$$= \frac{3x + 2}{6}\sqrt{3x^2 + 4x - 7} - \frac{25}{18}\sqrt{3} \ln \left(\frac{x + 2}{3} + \sqrt{3x^2 + 4x - 7}\right)$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN 1

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales.

1. $\int x^4 dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2}$
3. $\int x^{2/3} dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
6. $\int aay^2 dy$
7. $\int \frac{2}{t^2} dt$
8. $\int \sqrt[3]{3t} dt$
9. $\int \left(x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x}\right) dx$
10. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right) dx$
11. $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$
12. $\int \frac{x^2 - 6x + 5}{x} dx$
13. $\int \frac{dy}{\sqrt{a - by}}$
14. $\int (a + bt)^2 dt$
15. $\int x(2 + x^2)^2 dx$
16. $\int y(a + by^2) dy$
17. $\int t\sqrt{2t^2 + 3} dt$
18. $\int \frac{6z}{(5 - 3z^2)^2} dz$
19. $\int \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx$
20. $\int \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

21. $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

22. $\int \frac{dy}{(a+by)^3}$

23. $\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^3}$

24. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx^3)^2}$

25. $\int z(a+bz^3)^2 dz$

26. $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx$

27. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}dx$

28. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx$

29. $\int \frac{2+\ln x}{x}dx$

30. $\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx$

31. $\int \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x\, dx$

32. $\int \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

33. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{b-\sin ax}}dx$

34. $\int \frac{dx}{3+3x}$

35. $\int \frac{x^2}{2+x^3}dx$

36. $\int \frac{t}{a+bt^2}dt$

37. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx$

38. $\int \frac{y+2}{y^2+4y}dy$

39. $\int \frac{e^\theta}{a+be^\theta}d\theta$

40. $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$

41. $\int \frac{\sec^2 y}{a+b\tan y}dy$

42. $\int \frac{2x+3}{x+2}dx$

43. $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx$

44. $\int \frac{x+4}{2x+3}dx$

45. $\int \frac{e^{2S}}{e^{2S}+1}ds$

46. $\int \frac{3x\cos x^2}{(x+\operatorname{sen} x^2)^2}dx$

47. $\int \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$

48. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-5}}dx$

49. $\int \frac{2x}{\sqrt{3+2x}}dx$

50. $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

51. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

52. $\int \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3 dx$

53. $\int \frac{\sin a\theta}{\cos a\theta+b}d\theta$

54. $\int \frac{\csc^2\emptyset}{\sqrt{2\cot\emptyset+3}}d\emptyset$

55. $\int \frac{2x+7}{x+3}dx$

56. $\int \frac{x^2+2}{x+2}dx$

57. $\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$

58. $\int \frac{4x+3}{\sqrt[3]{1+3x+2x^2}}dx$

59. $\int \frac{e^S+2}{e^S+2s}ds$

60. $\int \frac{e^x+\sin x}{\sqrt{e^x-\cos x}}dx$

61. $\int \frac{\sec 2\theta\tan 2\theta}{3\sec 2\theta-2}d\theta$

62. $\int \frac{\sec^2 2t}{\sqrt{5+3\tan 2t}}dt$

63. $\int \frac{dx}{e^x}$

64. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$

65. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$

66. $\int xe^{x^2}\, dx$

67. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

68. $\int e^{\tan x} \sec^2 x\, dx$

69. $\int \sqrt{e^t}\, dt$

70. $\int a^x e^x\, dx$

71. $\int x\left(e^{x^2} + 2\right) dx$

72. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}} dx$

73. $\int (e^{2x})^2\, dx$

74. $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$

75. $\int \cos mx\, dx$

76. $\int \tan bx\, dx$

77. $\int \sec ax\, dx$

78. $\int \sec 3t \tan 3t\, dt$

79. $\int \csc ay \cot ay\, dy$

80. $\int \csc^2 3x\, dx$

81. $\int \cot \frac{x}{2} dx$

82. $\int x^2 \sec^2 x^3\, dx$

83. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

84. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

85. $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

86. $\int (\sec x - \tan x)^2 dx$

87. $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx$

88. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx$

89. $\int x \cos x^2\, dx$

90. $\int (x + \cos 2x) dx$

91. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{4 - \cos x}} dx$

92. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx$

93. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + 2\tan x}} dx$

94. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$

95. $\int \frac{dx}{9x^2 - 4}$

96. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$

97. $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

98. $\int \frac{\cos x}{4 - \operatorname{sen}^2 x} dx$

99. $\int \frac{b}{a^2x^2 - c^2} dx$

100. $\int \frac{5x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

101. $\int \frac{ax}{x^4 + b^4} dx$

102. $\int \frac{dt}{(t-2)^2 + 9}$

103. $\int \frac{dy}{\sqrt{1 + a^2y^2}}$

104. $\int \frac{du}{\sqrt{4 - (u+3)^2}}$

105. $\int \frac{dx}{m^2 + (x+n)^2}$

106. $\int \frac{du}{4 + (2u-1)^2}$

107. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

108. $\int \frac{dx}{2x - x^2 - 10}$

109. $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

111. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

112. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

113. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$

114. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

115. $\int \frac{dx}{4x-x^2}$

116. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

117. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

118. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$

119. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$

120. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

121. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

122. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$

123. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

124. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

125. $\int \sqrt{1+9x^2}\,dx$

126. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx$

127. $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx$

128. $\int \sqrt{4x^2+9}\,dx$

129. $\int \sqrt{5-3x^2}\,dx$

130. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

131. $\int \sqrt{5-2x-x^2}\,dx$

132. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

133. $\int \sqrt{10-4x+4x^2}\,dx$