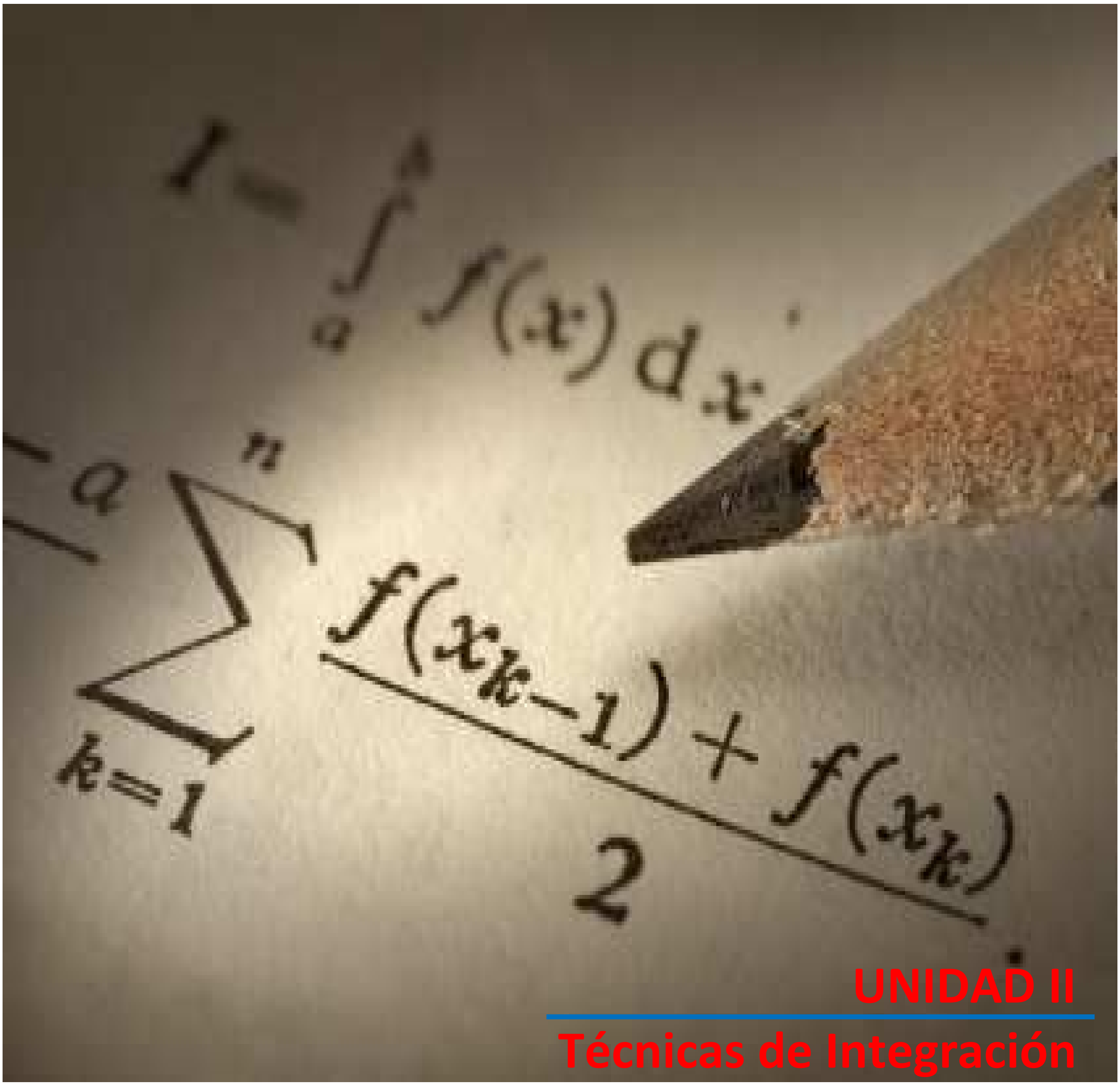


UNIDAD II

Técnicas de Integración

UNIDAD II

TECNICAS DE INTEGRACIÓN

Es común encontrar que muchas integrales no obedecen a una integración inmediata, por lo tanto tenemos que valernos de ciertos artificios para lograr reducirlas. El presente capítulo muestra algunas técnicas utilizadas para ello.

1. Sustitución por cambio de variable

$$si \qquad x = g(t)$$

Donde t es una variable y g una función continua diferenciable, tendremos:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

La función $g(t)$se procura elegir de tal manera que el segundo miembro de la ecuación anterior tome una forma más adecuada para la integración.

Ejemplo 1.Halle

$$\int x\sqrt{x-1}dx$$

Solución:

El objetivo aquí es tratar de eliminar el radical, por lo tanto, si hacemos

$$x-1 = t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{x-1}$$
$$x = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt$$

Sustituyendo:

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2-1)\cdot t \cdot 2tdt$$
$$= \int (t^2-1)\cdot t \cdot 2tdt$$
$$= 2\int (t^4 - t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo 2. Hallar

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$$

Solución:

$$Sea\colon\ u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$
$$= \frac{1}{2}ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C$$

2. Sustitución trigonométrica

Para casos en que la integral está bajo el signo radical es conveniente realizar las sustituciones trigonométricas:

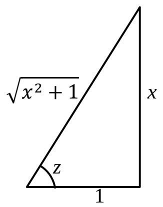
$$Para\ \sqrt{a^2+u^2}, \qquad haga \qquad u = a\tan z$$
$$Para\ \sqrt{a^2-u^2}, \qquad haga \qquad u = a\operatorname{sen} z$$
$$Para\ \sqrt{u^2-a^2}, \qquad haga \qquad u = a\sec z$$

Ejemplo 3.Halle

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$$

Solución:

$$Sea\colon\ x = \tan z \quad \Rightarrow \quad dx = \sec^2 z\, dz$$



$$\operatorname{sen} z = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\tan z = x$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2 z + 1}}{\tan^2 z}\sec^2 z\, dz$$
$$= \int \frac{\sec z \sec^2 z}{\tan^2 z}dz$$
$$= \int \frac{\cos^2 z}{\cos z \cos^2 z\ \operatorname{sen}^2 z}dz$$
$$= \int \frac{1}{\cos z\ \operatorname{sen}^2 z}dz$$

$$= \int \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos z \ \operatorname{sen}^2 z} dz$$

$$= \int \frac{\cos^2 z}{\cos z \ \operatorname{sen}^2 z} dz + \int \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos z \ \operatorname{sen}^2 z} dz$$

$$= \int \frac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z} dz + \int \sec z \, dz$$

$$= \int (\operatorname{sen} z)^{-2} \cos z \, dz + \int \sec z \, dz$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen} z} + \ln(\sec z + \tan z) + C$$

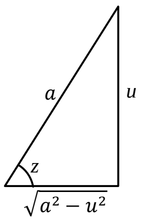
$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$

Ejemplo 4. Hallar

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}}$$

Solución:

$$Sea: \ u = \mathrm{a} \operatorname{sen} z \quad \Longrightarrow \quad du = \mathrm{a} \cos z \, dz$$



$$\operatorname{sen} z = \frac{u}{a} \qquad \cos z = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} \qquad \tan z = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \int \frac{a \cos z}{(a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z)^{3/2}} dz$$

$$= \int \frac{a \cos z}{a^3 (1 - \operatorname{sen}^2 z)^{3/2}} dz$$

$$= \int \frac{\cos z}{a^2 \cos^3 z} dz$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \sec^2 z \, dz$$

$$= \frac{1}{a^2} \tan z + C$$

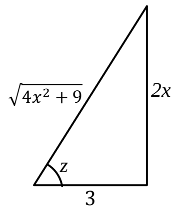
$$= \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Ejemplo 5. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{4x^2+9} - 3}{2x}\right) + C$$

Solución:

$$Sea: \ 2x = 3 \tan z \quad \Longrightarrow \quad 2dx = 3 \sec^2 z \, dz$$



$$\operatorname{sen} z = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+9}} \qquad \cos z = \frac{3}{\sqrt{4x^2+9}} \qquad \tan z = \frac{2x}{3}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = 3/2 \int \frac{\sec^2 z}{3/2 \tan z \sqrt{4 \tan z + 9}} dz$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\sec^2 z}{\tan z \sec z} dz$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\sec z}{\tan z} dz$$

$$= \frac{1}{3} \int \csc z \, dz$$

$$= \frac{1}{3} \ln(\csc z - \cot z) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x} - \frac{3}{2x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{4x^2+9} - 3}{2x}\right) + C$$

3. Integración por parte

Si u y v son funciones de la misma variable independiente, tenemos, según la fórmula para la diferenciación de un producto que

$$d(uv) = udv + vdu$$

Organizando

$$udv = d(uv) - vdu$$

$$\int u \, dv = \int d\,(uv) - \int v \, du$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Que se conoce con el nombre de formula de integración por parte.

Para aplicar esta fórmula en un caso dado, debe descomponerse la diferencial dada en dos factores: u y dv, y aunque no existan reglas para saber cual es cual, tenga en cuenta lo siguiente:

a. dx es siempre una parte de dv
b. Debe ser posible integrar dv
c. Cuando una expresión para integrar es el producto de dos funciones, ordinariamente es mejor elegir la de apariencia más complicada, con tal que puede integrarse como parte de dv

Ejemplo 6. Halle

$$\int x \ln x \, dx$$

Solución: si hacemos

$$u = \ln x \qquad \Longrightarrow \qquad \int d\,v = \int x\,dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo en la formula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

A veces para reducir la integral dada a una inmediata, hay que emplear varias veces la integración por parte.

Ejemplo 7. Halle

$$\int e^x \cos x\,dx$$

Solución: si hacemos

$$u = \cos x \qquad \Longrightarrow \qquad \int d\,v = \int e^x\,dx$$

$$du = -\operatorname{sen} x dx \qquad \Longrightarrow \qquad v = e^x$$

Sustituyendo en la formula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Aplicando integración por parte nuevamente:

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \Longrightarrow \qquad \int d\,v = \int e^x\,dx$$

$$du = \cos x dx \qquad \Longrightarrow \qquad v = e^x$$

Y sustituyendo:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx + C$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

Ejemplo 8. Halle

$$\int \sec^3 x\,dx$$

Solución: aunque a simple vista no representa un producto de funciones, podemos considerarla como tal al efectuar ciertas modificaciones

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx$$

$$u = \sec x \qquad \Longrightarrow \qquad \int d\,v = \int \sec^2 dx$$

$$du = \sec x \tan x\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad v = \tan x$$

Sustituyendo en la formula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x dx$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + C$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN 2

Hallar las siguientes integrales, utilizando para ello las sustituciones indicadas.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$; $x = \frac{1}{t}$

2. $\int \frac{dx}{e^x+1}$; $x = -\ln t$

3. $\int x(5x^2-3)^7 dx$; $t = 5x^2 - 3$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; $t = \sqrt{x+1}$

5. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}} dx$; $t = \operatorname{sen} x$

6. $\int \frac{dx}{x(1-x^2)}$; $x = \operatorname{sen}^2 t$

Hallar las siguientes integrales, utilizando para ello las sustituciones más adecuadas.

7. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

10. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x}$

11. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

12. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Hallar las siguientes integrales, empleando sustitución trigonométrica

14. $\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$

17. $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

18. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

20. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

Hallar las siguientes integrales, utilizando la formula de integración por parte

21. $\int ln\, x\, dx$

22. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

23. $\int x \cos 3x\, dx$

24. $\int \frac{x}{e^x} dx$

25. $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$

26. $\int x^2 e^{3x} dx$

27. $\int (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x} dx$

28. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$

29. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

30. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos x\, dx$

31. $\int x^2 \ln x\, dx$

32. $\int \ln^2 x\, dx$

33. $\int \frac{\ln x}{3} dx$

34. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

35. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$

36. $\int \frac{x}{sen^2 x} dx$

37. $\int \frac{x \cos x}{sen^2 x} dx$

38. $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

39. $\int 3^x \cos x \, dx$

40. $\int e^x \operatorname{sen} bx \, dx$

41. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

Hallar las siguientes integrales, empleando diferentes procedimientos

42. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$

43. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

44. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x \, dx$

45. $\int x \ln \frac{1 - x}{1 + x} dx$

46. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

47. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

48. $\int x \tan^2 2x \, dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x} dx$

50. $\int \cos^2(\ln x) \, dx$

51. $\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$

52. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

53. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

54. $\int \sqrt{A^2 + x^2} \, dx$

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$