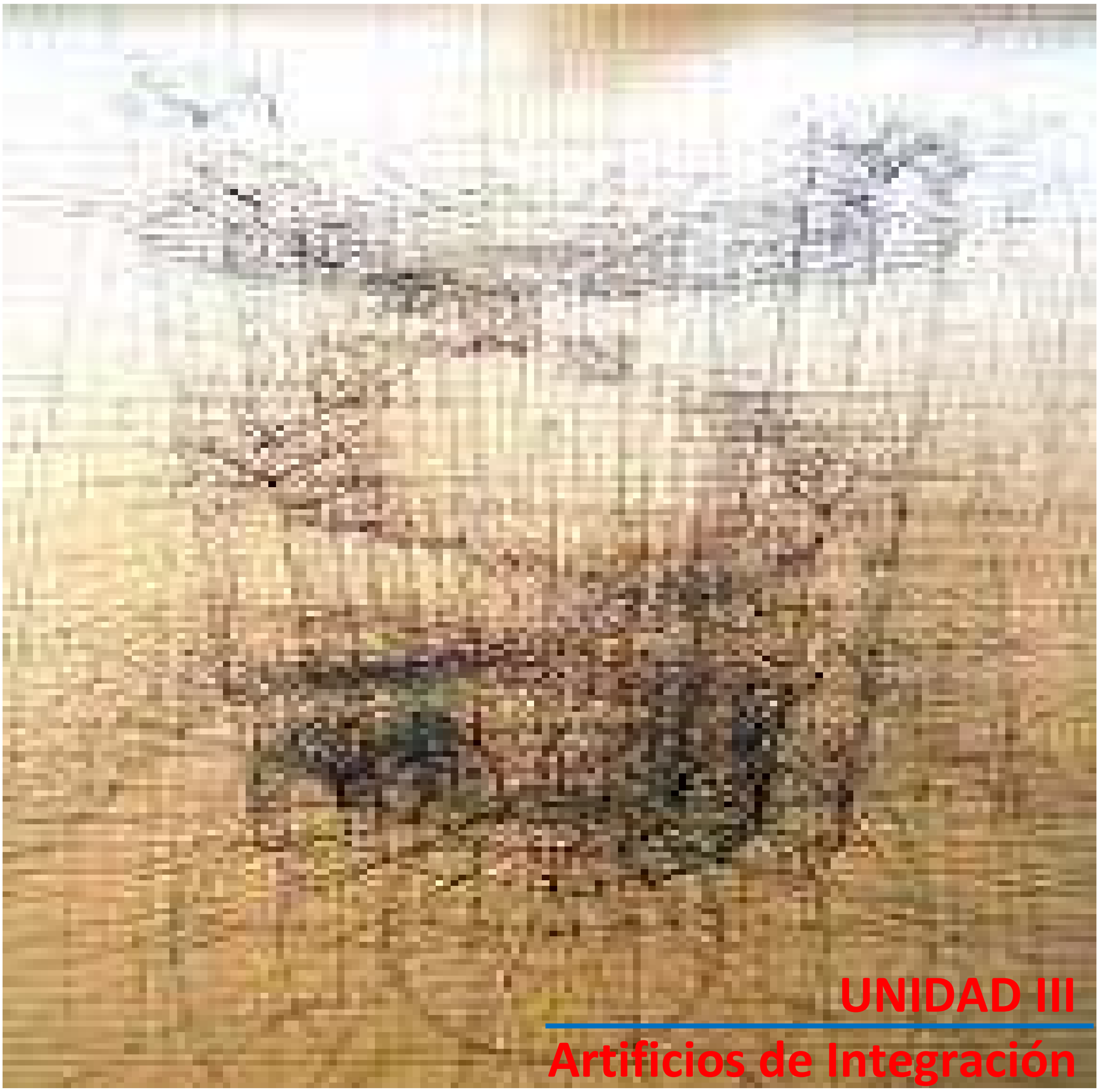


UNIDAD III

Artificios de Integración

UNIDAD III

ARTIFICIOS DE INTEGRACIÓN

La integración depende, en última instancia, del empleo adecuado de las formas básicas de integración. Cuando en un caso no sucede esto, a menudo es posible transformar la integral de modo que se puedan aplicar las formas básicas. Los artificios más comunes son:

a. Integración por parte
b. Integración de funciones racionales
c. Empleo de sustitución

1. Integración de funciones racionales

Una fracción racional es aquella cuyo numerador y denominador son funciones racionales enteras, es decir, funciones en que la variable no está afectada de exponente negativos o fraccionarios. Si el grado del numerador es igual o mayor al denominador, la fracción puede reducirse a una expresión mixta dividiendo el numerador por el denominador. Pero, si el grado del numerador es menor que el del denominador es necesario descomponerla en fracciones parciales más simples

***Teorema**: La integral de toda función racional cuyo denominador es posible descomponer en factores reales de primer y segundo grado, puede hallarse y puede expresarse en términos de funciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas inversas; es decir, en términos de las funciones elementales.*

Caso I. Los factores del denominador son todos de primer grado, y ningún factor se repite.

Cundo aparecen factores no repetidos de primer grado como $px+q$, le corresponde a cada factor, una fracción parcial de la forma

$$\frac{A}{px+q}$$

Ejemplo 1. Halle

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$$

Solución:

Tomamos la fracción y la descomponemos así:

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Ahora el problema se reduce en calcular los valores de A, B y C. Si multiplicamos la expresión por el denominador:

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

$$si\ igualamos\ a\ "0"\ cada\ factor\ tenemos:$$

$$x \quad = 0 \implies x = \quad 0;\ entonces \quad 3=-2A;\ \ A=-3/2$$

$$x-1=0 \implies x = \quad 1;\ entonces \quad 5 = \ 3B;\ \ B = \ \ 5/3$$

$$x+2=0 \implies x=-2;\ entonces -1 = \ 6C;\ \ C=-1/6$$

Por lo tanto la integral

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+2)+C$$

$$=\ln\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}+C$$

Caso II. Los factores del denominador son todos de primer grado, y algunos se repiten.

A todo factor de primer grado repetido n veces, como $(px+q)^n$, le corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A}{(px+q)^n}+\frac{B}{(px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{M}{px+q}$$

Ejemplo 2. Hallar

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$$

Solución:

Como $x-1$ aparece tres veces como factor, su descomposición se refleja en igual número de veces:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

El paso siguiente es determinar los valores de A, B, C, y D así:

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2$$

$$x=\ \ 0;\ entonces\ \ 1=-A\ \therefore\ A=-1$$
$$x=\ \ 1;\ entonces\ \ 2=\ \ B\ \therefore\ B=\ \ 2$$
$$x=-1;\ entonces\ \ 3=\ C-2D\ \ \therefore\ \ C=1\ \wedge\ D=2$$

Por lo tanto la integral

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$=-\ln x-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln(x-1)+C$$

$$=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{x}+C$$

Caso III. El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno de estos factores se repite.

Cundo aparecen factores no repetidos de segundo grado como x^2+px+q, le corresponde a cada factor una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Ejemplo 3. Hallar

$$\int\frac{4}{x^3+4x}dx$$

Solución:

Descompongamos en factores al denominador:

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Quitando el denominador

$$4=A(x^2+4)+x(Bx+C)=(A+B)x^2+Cx+4A$$

$$4A=4;\ entonces\ \ A=\ \ 1$$
$$C=0;\ entonces\ \ C=\ \ 0$$
$$A+B=0;\ entonces\ \ B=-1$$

Por lo tanto la integral

$$\int\frac{4}{x^3+4x}dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+4}dx$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$$

$$=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+C$$

Caso IV. El denominador contiene factores de segundo grado y algunos de estos se repiten.

A todo factor de segundo grado repetido n veces, como $(x^2+px+q)^n$, le corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{Lx+M}{x^2+px+q}$$

Ejemplo 4. Hallar

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx$$

Solución:

Como la potencia es dos, le corresponde la suma de 2 fracciones parciales así:

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Quitando denominadores

$$2x^3+x+3=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$$

$$2x^3+x+3=Cx^3+Dx^2+(A+C)x+(B+D)$$

$$C=2;\ entonces\ \ C=\ \ 2$$
$$D=0;\ entonces\ \ D=\ \ 0$$
$$A+C=1;\ entonces\ \ A=-1$$
$$B+D=3;\ entonces\ \ B=\ \ 3$$

Por lo tanto la integral

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= -\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{3}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \int \frac{3}{(x^2+1)^2}dx + \ln(x^2+1) + C$$

La segunda integral que queda pendiente, la podemos solucionar haciendo un cambio de variable:

$$Sea\colon\ x = \tan z \quad \Longrightarrow \quad dx = \sec^2 z\, dz$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \int \frac{3\sec^2 z}{(\tan^2 z+1)^2}dz + \ln(x^2+1) + C$$

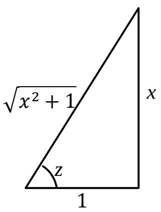
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \int \frac{3\sec^2 z}{\sec^4 z}dz + \ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \int 3\cos^2 z\, dz + \ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\int (1+\cos 2z)\, dz + \ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + 3/2(z + 2/2\operatorname{sen} 2z) + \ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + 3/2(z + \operatorname{sen} 2z) + \ln(x^2+1) + C$$



$$\operatorname{sen} z = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\tan z = x$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \tfrac{3}{2}(z + sen\, z \cos z) + ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \tfrac{3}{2}\left(arc\tan x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \tfrac{3}{2}\left(arc\tan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + ln(x^2+1) + C$$

2. Integración por sustitución de una nueva variable

Cuando las funciones algebraicas son no racionales (contienen radicales); es necesario, algunas veces, sustituir con una nueva variable, de tal manera que puedan convertirse en racionales o en formas elementales. Este método es comúnmente llamado integración por racionalización y existes varias acepciones

Caso I. Diferenciales que contienen solamente potencias fraccionarias de x.

Una expresión que solo contiene potencias fraccionarias de x puede transformarse en forma racional mediante la sustitución

$$x = z^n$$

Siendo n el denominador común de los exponentes fraccionarios de x

Ejemplo 5. Halle

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$$

Solución:

El valor de $n = 4$. Por lo tanto, se debe hacer

$$x = z^4 \quad \Longrightarrow \quad dx = 4z^3 dz$$
$$x^{1/2} = z^2 \quad y \quad x^{3/4} = z^3$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$$
$$= \int \frac{z^2}{1+z^3}4z^3 dz$$
$$= 4\int \frac{z^5}{1+z^3}dz$$

Como el numerador es de mayor potencia que el denominador, efectuamos la división simple,

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx = 4\int \left(z^2 - \frac{z^2}{1+z^3}\right)dz$$
$$= \tfrac{4}{3}z^3 - \tfrac{4}{3}ln(1+z^3) + C$$

Reemplazando al valor original $\quad z = x^{\frac{1}{4}}$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} - \tfrac{3}{4}ln(1+z^3) + C$$

Caso II. Diferenciales que contienen solamente potencias fraccionarias de $a + bx$

Una expresión que solo contiene potencias fraccionarias de $a + bx$ puede transformarse en forma racional mediante la sustitución

$$a + bx = z^n$$

Siendo n el denominador común de los exponentes fraccionarios de la expresión $a + bx$

Ejemplo 6. Hallar

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}}$$

Solución:

$$Sea:\ 1 + x = z^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2zdz$$

$$(1+x)^{3/2} = z^3 \quad y \quad (1+x)^{1/2} = z$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}} = \int \frac{2z}{z^3 + z} dz$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2+1} dz$$

$$= 2\arctan z + C$$

Cambiando los valores a x

$$= 2\arctan(1+x)^{1/2} + C$$

Caso III. Diferenciales binomias

Un diferencial de la forma $x^m(a+bx^n)^p dx$, siendo a y b constantes y los exponentes m, n, p números racionales, se llama diferencial binomia

Proposición: Toda diferencial binomia puede reducirse a la forma $x^m(a+bx^n)^{r/s}$. Siendo m, n, r, s números y n positivo.

Los radicales se pueden quitar en los siguientes casos:

$$si \quad \frac{m+1}{n} = entero\ o\ cero, haciendo\ a + bx^n = z^s$$

$$si \quad \frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = entero\ o\ cero, haciendo\ a + bx^n = z^s x^n$$

Ejemplo 7. Demostrar que

$$\int \frac{x^3}{(a+bx)^{3/2}} dx = \frac{1}{b^2}\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C$$

Solución:

$$\int \frac{x^3}{(a+bx)^{3/2}} dx = \int x^3(a+bx)^{-3/2}\, dx$$

$$Aquí:\ m = 3, \quad n = 2, \quad r = -3, \quad s = 2$$

$$y \quad \frac{m+1}{n} = 2\ número\ entero. Entonces\ la\ sustitución\ es$$

$$a + bx^2 = z^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{1/2}$$

$$dx = \frac{zdz}{b^{1/2}(z^2-a)^{1/2}} \qquad y \qquad (a+bx)^{3/2} = z^3$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{x^3}{(a+bx)^{3/2}} dx$$

$$= \int \left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{3/2} \frac{zdz}{b^{1/2}(z^2-a)^{1/2}} \frac{1}{z^3}$$

$$= \frac{1}{b^2}\int (1 - az^{-2})dz$$

$$= \frac{1}{b^2}(z + az^{-1}) + C$$

$$= \frac{2a+bx^2}{b^2\sqrt{a+bx^2}} + C$$

Ejemplo 8. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{1/2}}{3x^3} + C$$

Solución:

$$Aquí:\ m = -4, \quad n = 2, \quad r = -1, \quad s = 2$$

$$y \quad \frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = -2\ número\ entero\ y\ la\ sustitución\ es$$

$$1 + x^2 = z^2x^2; \quad z = \frac{(1+x^2)^{1/2}}{x}; \quad x = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}$$

$$dx = -\frac{zdz}{(z^2-1)^{3/2}}; \quad x^4 = \frac{1}{(z^2-1)^2}; \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{z}{(z^2-1)^{1/2}}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\int \frac{\frac{zdz}{(z^2-1)^{3/2}}}{\frac{1}{(z^2-1)^2}\cdot\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}}}$$

$$= -\int (z^2-1)dz$$

$$= z - \frac{z^3}{3} + C = \frac{z(3 - z^2)}{3} + C$$

$$= \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{x} \cdot \frac{\left(3 - \frac{1 + x^2}{x^2}\right)}{3} + C$$

$$= \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{x} \cdot \frac{(3x^2 - 1 - x^2)}{3x^2} + C$$

$$= \frac{(2x^2 - 1)(1 + x^2)^{1/2}}{3x^3} + C$$

3. Transformación de las diferenciales trigonométricas

***Teorema**: Una diferencial trigonométrica que contiene sólo funciones racionales de* $\operatorname{sen} u$ *y* $\cos u$ *puede transformarse en otra expresión diferencial, racional en* z*, mediante la sustitución:*

$$\tan \frac{u}{2} = z$$

O lo que es lo mismo

$$sen\, u = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad cos\, u = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad du = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

Ejemplo 9. Halle

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} 2x}$$

Solución: sea

$$2x = u \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad dx = \tfrac{1}{2}du$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{5 + 4\, sen\, 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{5 + 4\, sen\, u}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{5 + \frac{8z}{1 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2dz}{5z^2 + 8z + 5}$$

$$= \frac{1}{3} arctan \frac{5z + 4}{3} + C$$

Sustituyendo los valores de z

$$\int \frac{dx}{5 + 4\, sen\, 2x} = \frac{1}{3} arctan \frac{5\, tan\, x + 4}{3} + C$$

4. Sustituciones diversas

Hasta ahora hemos encontrado, a través de sustituciones, la forma de eliminar los radicales. Pero, existen algunas integrales que no encajan en estos modelos y las sustituciones dependen de la habilidad de la persona que se enfrentan al problema.

La más conocida de estas es la sustitución reciproca:

$$x = \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

Ejemplo 10. Hallar

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$$

Solución:

$$x = \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx = -\int (a^2 z^2 - 1)^{1/2} z dz$$

$$= -\frac{(a^2 z^2 - 1)^{3/2}}{3a^2} + C$$

$$= -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3a^2 x^3} + C$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN 3

Sección 1. Integración de funciones racionales. Hallar las integrales

1. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$ R/ $ln\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}+C$

2. $\int \frac{5x^2-3}{x^3-x}dx$ R/ $ln\, x^3(x^2-1)+C$

3. $\int \frac{4x+3}{4x^3+8x^2+3x}dx$ R/ $-\frac{1}{2}ln\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2}+C$

4. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$ R/ $x+\frac{1}{2}ln\frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2}+C$

5. $\int \frac{z^2}{(z-1)^3}dz$ R/ $ln(z-1)-\frac{2}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)^2}+C$

6. $\int \frac{y^8-8}{y^3+2y^2}dy$ R/ $\frac{y^2}{2}-2y+\frac{4}{2y}+2\,ln(y^2+2y)+C$

7. $\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$ R/ $ln\, x^2(x^2+3)+C$

8. $\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}dx$ R/ $ln(x-1)+arctan\, x+C$

9. $\int \frac{2t^2-8t-8}{(t-2)(t^2-4)}dt$ R/ $2\,ln\frac{t^2+4}{t-2}+C$

10. $\int \frac{x-18}{(2x-3)(x^2+4)}dx$ R/ $\frac{1}{2}ln\frac{x^2+4}{2x-3}+arctan\frac{x}{2}+C$

11. $\int \frac{x^2+x-10}{4x^3+9x}dx$ R/ $ln\frac{4x^2+9}{x^2}+\frac{1}{6}arctan\frac{2x}{3}+C$

12. $\int \frac{2y^3+y^2+2y+2}{y^4+3y^2+2}dy$ R/ $ln(y^2+2)+arctan\, y+C$

13. $\int \frac{dz}{z^4+z^2}$ R/ $-\frac{1}{z}-arctan\, z+C$

14. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}dx$ R/ $arctan\, x+\frac{1}{x+1}+C$

15. $\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}dx$ R/ $\frac{1}{2}ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$

16. $\int \frac{x^5+9x^3-9x^2-9}{x^3+9x}dx$ R/ $\frac{x^3}{3}-ln\, x(x^2+9)^4+C$

17. $\int \frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}dx$ R/ $ln\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x}{2x^2+4}+\frac{\sqrt{2}}{4}arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

18. $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$ R/ $\frac{x^2}{2}-4ln(x^2+4)-\frac{8}{x^2+4}+C$

19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$ R/ $-\frac{1}{2}ln\frac{x^2+x+1}{x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

20. $\int \frac{x^5+4x^3}{(x^2+2)^3}dx$ R/ $\frac{1}{2}ln(x^2+2)+\frac{1}{(x^2+2)^2}+C$

21. $\int \frac{4}{x^4-1}dx$ R/ $ln\frac{x-1}{x+1}-2\,arctan\, x+C$

22. $\int \frac{(2x^2+3x+2)dx}{(x+2)(x^2+2x+2)}$ R/ $2ln(x+2)-arctan(x+1)+C$

23. $\int \left(\frac{x+3}{x^2+4x+5}\right)^2 dx$ R/ $arctan\,(x+2)-\frac{1}{x^2+4x+5}+C$

Sección 2. Integración por sustitución de una nueva variable. Hallar las integrales.

24. $\int \frac{5x+9}{(x-9)^{3/2}}dx$ R/ $\frac{2}{\sqrt{x}}+2\,ln\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+C$

25. $\int \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x^2-3x}dx$ R/ $\frac{1}{4}ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{3}}{6}arctan\sqrt{\frac{x}{3}}+C$

26. $\int \frac{dx}{x-x^{4/3}}$ R/ $3\,ln\frac{x^{1/3}}{1-x^{1/3}}+C$

27. $\int \frac{x^{3/2}-x^{1/3}}{6x^{1/4}}dx$ R/ $\frac{2}{27}x^{9/4}-\frac{2}{13}x^{13/12}+C$

28. $\int \frac{z^2}{(4z+1)^{5/2}}dz$ R/ $\frac{6z^2+6z+1}{12(4z+1)^{3/2}}+C$

29. $\int \frac{dy}{y^{5/8}-y^{1/8}}$ R/ $\frac{8y^{3/8}}{3}+2\,ln\frac{y^{1/8}-1}{y^{1/8}+1}+4arctany^{1/8}+C$

30. $\int \frac{x}{(a+bx)^{3/2}}dx$ R/ $\frac{2(a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}+C$

31. $\int y\sqrt[3]{a+y}\,dy$ R/ $\frac{3}{28}(4y-3a)(a+y)^{4/3}+C$

32. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ R/ $x+1+4\sqrt{x+1}+4\,ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+C$

33. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+a}}$ $\quad R/\frac{3}{2}(x+a)^{2/3}-3(x+a)^{1/3}+3\,ln\left(1+\sqrt[3]{x+a}\right)+C$

34. $\int \frac{t+5}{(t+4)\sqrt{t+2}}dt$ $\quad R/ \quad 2\sqrt{t+2}+2\sqrt{2}\,arctan\sqrt{\frac{t+2}{2}}+C$

Sección 3. Diferenciales binomias. Hallar las integrales.

35. $\int x^5\sqrt{1+x^2}dx$ $\quad R/ \quad \frac{2(3x^3-2)(1-x^3)^{3/2}}{45}+C$

36. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$ $\quad R/ \quad \frac{2(x^3-2)\sqrt{1-x^3}}{9}+C$

37. $\int x^5(8+x^3)^{3/2}dx$ $\quad R/ \quad \frac{2(5x^3-16)(8+x^3)^{5/2}}{105}+C$

38. $\int \frac{x^5}{(a+bx^3)^{3/2}}dx$ $\quad R/ \quad \frac{2(2a+bx^3)}{3b^2\sqrt{a+bx^3}}+C$

39. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{3/2}}$ $\quad R/ \quad -\frac{(1+x^3)^{1/3}}{x}+C$

40. $\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{1/3}}$ $\quad R/ \quad -\frac{(1+x^3)^{2/3}}{2x^2}+C$

41. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{3/4}}$ $\quad R/ \quad -\frac{(1+x^4)^{1/4}}{x}+C$

42. $\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{4/3}}$ $\quad R/ \quad -\frac{1+3x^3}{2x^2(1+x^3)^{1/3}}+C$

43. $\int \frac{2\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx$ $\quad R/ \quad ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C$

Sección 4. Transformación de las diferenciales trigonométricas. Hallar las integrales.

44. $\int \frac{d\theta}{1+sen\,\theta+cos\,\theta}$ $\quad R/ \quad ln\left(1+tan\frac{\theta}{2}\right)+C$

45. $\int \frac{dx}{sen\,x+tan\,x}$ $\quad R/ \quad \frac{1}{2}ln\,tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}tan^2\frac{x}{2}+C$

46. $\int \frac{d\emptyset}{5+4\,cos\,\emptyset}$ $\quad R/ \quad \frac{2}{3}\,arctan\left(\frac{1}{3}tan\frac{\emptyset}{2}\right)+C$

47. $\int \frac{d\theta}{4+5\,cos\,\theta}$ $\quad R/ \quad \frac{1}{3}ln\left(\frac{tan\frac{\theta}{2}+3}{tan\frac{\theta}{2}-3}\right)+C$

48. $\int \frac{dx}{4+5\,cos\,x}$ $\quad R/ \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}tan\frac{x}{2}\right)+C$

49. $\int \frac{dy}{2sen\,y-cos\,y+3}$ $\quad R/ \quad arctan\left(1+2\,tan\frac{y}{2}\right)+C$

50. $\int \frac{cos\,\theta}{5-3\,cos\,\theta}d\theta$ $\quad R/ \quad -\frac{\theta}{3}+\frac{5}{6}arctan\left(2\,tan\frac{\theta}{2}\right)+C$

51. $\int \frac{dy}{4sec\,y+5}$ $\quad R/ \quad \frac{2}{5}arctan\left(tan\frac{y}{2}\right)+\frac{4}{15}ln\left(\frac{tan\frac{y}{2}-3}{tan\frac{y}{2}+3}\right)+C$

Sección 5. Sustituciones diversas. Hallar las integrales utilizando las sustituciones sugeridas.

52. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$ $\quad R/ \quad ln\left(\frac{x}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}\right)+C$

$Con\ x=\frac{1}{z}$

53. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$ $\quad R/\frac{1}{\sqrt{2}}\,ln\left(\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}\right)+C$

$Con\ \sqrt{x^2-x+2}=z-x$

54. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ $\quad R/2\,arctan\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C$

$Con\ \sqrt{x^2+2x-1}=z-x$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ $\quad R/\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left(\frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}\right)+C$

$Con\ \sqrt{2+x-x^2}=(x+1)z$

56. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}}$ $\quad R/-\sqrt{\frac{2}{3}}arctan\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)2}}+C$

$Con\ \sqrt{5x-6-x^2}=(x-2)z$

57. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ $\quad R/-arcsen\left(\frac{1-x}{2x}\right)+C$

$Con\ x=\frac{1}{z}$

58. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}}$ $\quad R/ \quad ln\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x}\right)+C$

$Con\ x=\frac{1}{z}$

59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ $\quad R/-\frac{1}{2}arcsen\left(\frac{2-x}{\sqrt{2}x}\right)+C$

$Con\ x=\frac{1}{z}$

60. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}}$ $\quad R/\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}+ln\left(\frac{1+x+\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}\right)+C$

$Con\ x=\frac{1}{z}$

61. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}$ $\quad R/\frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x}-3arcsen\left(\frac{1-3x}{6x}\right)+C$

$Con\ x=\frac{1}{z}$

Problemas adicionales. De acuerdo a la integral utilizar el método más adecuado para hallarla

62. $\int \frac{8x}{x^3 - 4x^2} dx$

63. $\int \frac{5x^2 - 9}{x^3 - 9x} dx$

64. $\int \frac{3z + 7}{(z+1)(z+2)(z+3)} dz$

65. $\int \frac{3x^2 + 11x + 2}{(x+3)(x^2-1)} dx$

66. $\int \frac{x^2}{(2x+3)(4x^2-1)} dx$

67. $\int \frac{t^4 + 1}{t^3 - t} dt$

68. $\int \frac{x^2 - x - 5}{x^3 + 5x^2} dx$

69. $\int \frac{5x^2 + 14x + 10}{(x+2)(x+1)^2} dx$

70. $\int \frac{24y^2 + 10y + 5}{(2y-1)(2y+1)} dx$

71. $\int \frac{x + 2}{x^4 + 2x^3 + x^2} dx$

72. $\int \frac{x^3 - 2x - 4}{x^4 + 2x^3} dx$

73. $\int \frac{2x^2 + 1}{(x-2)^3} dx$

74. $\int \frac{y^4 - 3y^3}{(y-2)(y^2-1)} dy$

75. $\int \frac{2x^4 + 3x^3 - 20x - 28}{(x^2-4)(2x-1)} dx$

76. $\int \frac{6z^2 + 3z + 4}{z^3 + 2z} dz$

77. $\int \frac{y^4 + 3}{(y+1)(y^2+1)} dy$

78. $\int \frac{3x^3 + 3x + 1}{x^4 + 3x^2} dx$

79. $\int \frac{3w^3 + w^2 + 3}{w^4 + 3w^2} dw$

80. $\int \frac{5x^2 + 12x + 9}{x^3 + 3x^2 + 3x} dx$

81. $\int \frac{4x^3 + 3x^2 + 18x + 12}{(x^2+4)^2} dx$

82. $\int \frac{dy}{y + 2\sqrt{y} + 5}$

83. $\int \frac{dt}{t(1 - \sqrt[3]{t})}$

84. $\int \frac{xdx}{(2x+3)^{\frac{4}{3}}}$

85. $\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{4}} - (x+1)^{\frac{5}{4}}}$

86. $\int \frac{dt}{(t-2)^{\frac{1}{2}} - (t-2)^{\frac{3}{4}}}$

87. $\int \frac{x + 3}{(x+5)\sqrt{x+4}} dx$

88. $\int \frac{2 - \sqrt{2x+3}}{1 - 2x} dx$

89. $\int x^5 \sqrt{1 - x^3} dx$

90. $\int x^5 (a^3 - x^3)^{3/2} dx$

91. $\int x(1 + x^3)^{1/3} dx$

92. $\int \frac{x^5 + 2x^2}{(1 + x^3)^{3/2}} dx$

93. $\int \frac{x^5 + 2x}{\sqrt{1 + x^3}} dx$

94. $\int \frac{dy}{1 + sen\, y - cos\, y}$

95. $\int \frac{dy}{\cot y + \csc y}$

96. $\int \frac{dy}{13 - 5\cos y}$

97. $\int \frac{dy}{13\cos y - 5}$

98. $\int \frac{dy}{2\cos y + 1}$

99. $\int \frac{dy}{2 + \operatorname{sen} y}$

100. $\int \frac{dy}{1 + 2\operatorname{sen} y}$

101. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{5 - 4\operatorname{sen}\theta} d\theta$

102. $\int \frac{d\theta}{5\sec\theta - 4}$

103. $\int \frac{4}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx$ $\quad$ $Hagase\ \sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$

104. $\int \frac{4x}{(x^2 - 2x + 3)^{3/2}} dx$ $\quad$ $Hagase\ \sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$

105. $\int \frac{2}{\sqrt{5x - 6 - x^2}} dx$ $\quad$ $Hagase\ \sqrt{5x - 6 - x^2} = (x - 2)z$

106. $\int \frac{2x}{\sqrt{5x - 6 - x^2}} dx$ $\quad$ $Hagase\ \sqrt{5x - 6 - x^2} = (x - 2)z$