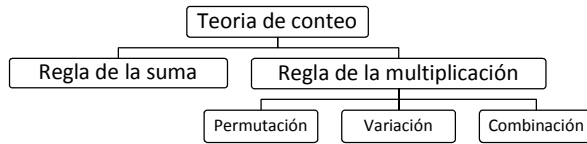




**UNIDAD VIII**  
**Teoría de conteo**

## UNIDAD 8

### TEORÍA DE CONTEO



Se les denomina técnicas de conteo a las combinaciones, permutaciones y diagrama de árbol, que nos proporcionan la información de todas las maneras posibles en que ocurre un evento determinado

**Regla de la suma.** Si una primera tarea puede realizarse de  $m$  formas y una segunda tarea puede realizarse de  $n$  formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces para realizar cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de  $m + n$  formas.

#### Ejemplo

Una biblioteca tiene 40 libros de historia y 50 de filosofía. Si un estudiante quiere aprender acerca de alguno de estos dos temas, por la regla de la suma puede elegir entre  $40 + 50 = 90$  libros.

(Nota: el estudiante no quiere estudiar historia y filosofía, sino historia o filosofía.)

La regla puede ampliarse a más de dos tareas, siempre que ningún par de ellas pueda ocurrir simultáneamente.

**Regla del producto.** Si un procedimiento se puede descomponer en dos etapas y si existen  $m$  resultados posibles de la primera etapa, y para cada uno de estos resultados, existen  $n$  resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de  $m \times n$  formas.

#### Ejemplo

1. Para una obra de teatro hay 6 hombres y 8 mujeres que aspiran a los papeles principales.

#### Solución

El director puede elegir a la pareja principal de  $6 \times 8 = 48$  formas.

Esta regla también puede ampliarse a más de dos etapas.

#### Ejemplo

2. Si las placas de los automóviles constan de 2 letras seguidas de 4 dígitos, ¿cuántas placas diferentes son posibles?

- Si ninguna letra o dígito se puede repetir
- Si se pueden repetir las letras y los dígitos

#### Solución

a. Si ninguna letra o dígito se puede repetir. Existen 27 letras posibles para las placas y 10 dígitos

$$27 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3.538.080.$$

b. Si se pueden repetir las letras y los dígitos, serán posibles

$27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 7.290.000$  placas diferentes.

**Factorial.** Para un entero  $n \geq 0$ , se define  $n!$  ( $n$  factorial) como:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1 \text{ para } n \geq 1$$

Notar que  $n! = n(n-1)!$

**Permutación ( $P_n$ ).** Dado un conjunto de  $n$  elementos, se denomina permutación a cada uno de los conjuntos que se pueden formar con estos elementos tales que cada uno de ellos difiere de otro en el orden en que son considerados los elementos.

Dicho de otro modo, dada una colección de  $n$  objetos distintos, cualquier disposición lineal de estos objetos se denomina permutación de la colección.

### Ejemplo

Un grupo de 5 personas va a sentarse en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

5            4            3            2            1  
 1ª pos   2ª pos   3ª pos   4ª pos   5ª pos

Cualquiera de las 5 personas puede ocupar la primera posición de la fila. Para la segunda posición podemos elegir entre 4 personas. Continuando de esta manera, sólo tenemos una persona para ocupar la quinta posición. Esto produce un total de  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  disposiciones posibles de las 5 personas. Se obtiene exactamente la misma respuesta si las posiciones se ocupan en otro orden (por ejemplo, 3ª posición, 1ª posición, 4ª, 5ª y 2ª).

En general, si existen  $n$  objetos distintos, el número de permutaciones para los  $n$  objetos es

$$n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

$\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{n-ésima pos} \\ & & & & | \\ & & & & \text{3ª pos} \\ & & & & | \\ & & & & \text{2ª pos} \\ & & & & | \\ & & & & \text{1ª pos} \end{array}$

$$P_n = n!$$

Se lee "permutaciones de  $n$ ".

### Ejemplo

Dadas las letras a, b, c existen seis formas de disponerlas:  $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Las seis permutaciones son:

$\begin{array}{ccc} a b c & b a c & c a b \\ a c b & b c a & c b a \end{array}$

**Variación ( $V_r^n$ ).** Dado un conjunto de  $n$  elementos, se denomina variación de tamaño  $r$  a todos los conjuntos de  $r$  elementos escogidos de entre los  $n$ , tales que un conjunto difiere de otro en al menos un elemento o en el orden en que se consideran los elementos.

### Ejemplo

En un grupo de 10 personas, se elegirá a 5 y se les ubicará en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones son posibles?

10            9            8            7            6  
 1ª pos   2ª pos   3ª pos   4ª pos   5ª pos

Cualquiera de las 10 personas puede ocupar la primera posición de la fila. Para ocupar la segunda posición tenemos 9 personas. Siguiendo de esta manera, hay 6 personas de donde elegir para que ocupen la quinta posición. Esto produce

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10.240 \text{ disposiciones posibles.}$$

En general, si existen  $n$  objetos distintos, y  $r$  es un entero, con  $0 \leq r \leq n$ , entonces el número de arreglos de tamaño  $r$  para los  $n$  objetos es

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{r-ésima pos} \\ & & & & | \\ & & & & \text{3ª pos} \\ & & & & | \\ & & & & \text{2ª pos} \\ & & & & | \\ & & & & \text{1ª pos} \end{array}$

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Se lee "variaciones de n en r".

$$\frac{V_5^{10}}{P_5} = 252$$

### Ejemplo

Dadas las letras a, b, c podemos formar 6 arreglos de tamaño 2.

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$V_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1!} = 6$$

Los 6 arreglos son:

a b    b a    a c    c a    b c    c b

**Combinaciones** ( $C_r^n$ ). Dado un conjunto de n elementos, se denomina combinaciones de tamaño r a todos los conjuntos que se pueden formar con r elementos tomados de entre los n elementos, de modo que cada conjunto difiera de los demás en por lo menos un elemento.

### Ejemplo

Siguiendo con el mismo ejemplo, si en un grupo de 10 personas se elige a 5 para tomarles una foto, ¿cuántos grupos de 5 pueden formarse, si el orden no importa?

Si el orden importara, habría  $V_5^{10}$  disposiciones diferentes. Pero en este caso no interesa el orden, así que si una de las posibilidades es Juan, María, Luis, Ana y Pedro, entonces la permutación Luis, Pedro, María, Ana y Juan corresponden a la misma combinación. Cada grupo de 5 personas puede ordenarse de 5! formas diferentes. Así, cada combinación corresponde a 5! permutaciones. Por lo tanto, el número de combinaciones satisface:

o sea que el número de combinaciones es igual a:

En general, dados n objetos distintos, el número de combinaciones de tamaño r de estos objetos, con  $0 \leq r \leq n$ , se denota  $C_r^n$  y corresponde a:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Se lee "combinaciones de n en r".

### Ejemplo

Dadas las letras a, b, c existen 3 combinaciones de tamaño 2.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_2^3 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Las 3 combinaciones son:

a b                    a c                    b c

## RESUMEN

En la teoría de conteo se pueden manejar dos tipos de reglas:

1. La regla de la suma. Se aplica en aquellos eventos en los cuales sólo se puede hacer uno (estar en cine o en la iglesia)
2. La regla del producto. Las opciones ocurren simultáneamente. Presenta los siguientes casos especiales:
  - a. Permutaciones. De una colección de objetos, cada uno de los conjuntos que se pueden formar con sus elementos (todos)
  - b. Variaciones. De una colección de objetos, cada uno de los conjuntos que se pueden formar con una parte de sus elementos. Difiere uno de otro en al menos un elemento o en el orden en que se consideran los elementos (importa el orden, no es lo mismo 12 que 21)
  - c. Combinaciones. De una colección de objetos, cada uno de los conjuntos que se pueden formar con una parte de sus elementos. Difiere uno de otro en al menos un elemento (no importa el orden)

## PROBLEMAS 8

1. El jugador parqués profesional Julio Arruinao, lanza los dados para mover sus fichas, ¿Cuántos resultados posibles puede obtener julio?
2. En la Institución Educativa “El Machete Candente”, se piensa recoger fondos para arreglar los jardines de la institución y se propuso rifar un DVD, ¿Cuántas boletas tienen que imprimir, si consta de dos dígitos?
3. En Colombia las palcas de los vehículos constan de tres letras y tres dígitos pudiéndose las letras y los dígitos repetir, ¿Cuántas placas diferentes podrían fabricarse?
4. El restaurante “La Mosca Elegante” ofrece en su almuerzo ejecutivo las siguientes posibilidades: sopa (huesos, pescado o Pollo); Carnes (res, pescado, pollo, hígado o cerdo); acompañamiento (frijol, lenteja o plátano maduro); jugo (maracuyá, mora, avena o guayaba). Si usted, decide almorzar, ¿Cuántas formas diferentes tienes par comer?
5. Juancho Intenso lanza al aire una moneda tres veces y espera que caiga al piso, ¿Cuántas formas diferentes de grupos de caras y sellos puede obtener Juancho?
6. Pedro Nerd tiene una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Saca una bola de la urna, anota el número y la devuelve a la urna. ¿Cuántas variaciones puede obtener Pedro en el experimento?
7. El coro “el desafinao” consta de 7 mujeres y 8 hombres
  - a. ¿De cuantas formas diferentes pueden acomodarse las mujeres en el escenario?

- b. ¿De cuantas formas diferentes pueden acomodarse los hombres en el escenario?
  - c. ¿De cuantas formas diferentes pueden acomodarse todo el grupo en el escenario, sin importar el orden?
  - d. Si se necesita un hombre y una mujer como cantantes principales, cuantas parejas pueden formar el director para escogerlos.
8. En una urna se colocan nueve balotas enumeradas del 1 al 9 de la cual se sacan dos
- a. Si la balota se vuelve a colocar en la urna antes de sacarla nuevamente ¿Cuántas números podrían formarse?
  - b. Si la balota no se vuelve a depositar en la urna ¿Cuántas números podrían formarse?
9. De la palabra FLOJERA, cuantas palabras podrán formarse (considere como palabra cualquier combinación de letras así no tenga sentido)
10. De la palabra GLORIA, cuantas palabras de dos letras podrán formarse (considere como palabra cualquier combinación de letras así no tenga sentido)
11. La gata de Doña Ratona parió 5 gaticos, feliz del acontecimiento quiere sacarles fotos de dos en dos. ¿Cuántas fotos tendrá que tomar doña Ratona?