



UNIDAD IX

Eventos probabilísticos

UNIDAD 9

EVENTOS PROBABILÍSTICOS

Muchas veces ocurre que al efectuar observaciones en situaciones análogas y siguiendo procesos idénticos se logaran resultados diferentes; por ejemplo, por cuidadoso que seamos al efectuar una medición, repitiendo varias veces la medición, por lo general obtenemos medida diferentes para cada observación; esta variaciones se atribuyen al *azar* y el error de las mediciones se llama error aleatorio.

Experimentos o fenómenos aleatorios: Son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento. Al efectuar un experimento aleatorio, como lanzar un dado, la respuesta no está definida como ocurre con nuestros problemas de aritmética; el resultado escapa a nuestros procedimientos y se repetimos el experimento bajo las mismas condiciones las respuestas suelen ser diferentes e imposibles de predecir. Lo único que podemos afirmar es que el resultado será *algunos* de los puntos del dado que lanzamos.

Espacio muestral (E): Es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En adelante lo designaremos por *E*. Al identificar un conjunto de sucesos posibles debemos asegurarnos de que sea completo, es decir que cada realización del experimento pueda asignarse por lo menos un elemento del conjunto de sucesos posibles. También debemos hacer que los elementos sean *mutuamente excluyentes*, o sea que a cada realización del experimento pueda asignarle a lo sumo un elemento del conjunto de elementos posibles. Una vez definido el conjunto de

sucesos posibles para determinado experimento aleatorio, queda definido el *suceso imposible*, que es aquel que no pertenece al conjunto de sucesos posibles. Por ejemplo, al lanzar un dado cuyas caras tienen marcados los puntos del uno al seis, el conjunto de sucesos posibles son los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un suceso imposible es que al lanzar un dado con esas marcas salga una cara con el número diez. Por su parte, los sucesos posibles 1, 2, 3, 4, 5, 6 son mutuamente excluyentes, ya que nunca será posible que al efectuar un lanzamiento se produzca como resultado la respuesta simultánea, por ejemplo, 1 y 5 en un solo dado.

Ejemplos:

En un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

En una moneda, $E = \{C, S\}$

Suceso aleatorio (A): Es un acontecimiento que ocurrirá o no, dependiendo del azar. El *suceso* de un fenómeno o experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral *E*.

Ejemplo:

Se considera el sexo de los hijos de las familias de tres hijos. Sea *A* el suceso *el hijo mayor es una mujer*, y *B* el suceso *los dos hijos pequeños son varones*. ¿Cuáles son los elementos de *A* y *B*?

Solución

Llamando *V* a ser varón y *M* a ser mujer, el espacio muestral está formado por los sucesos elementales:

$$E = \{(VVV), (VVM), (VMV), (MVV), (VMM), (MVM), (MMV), (MMM)\}$$

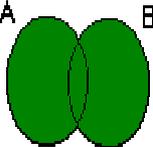
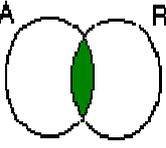
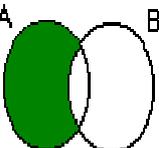
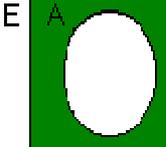
Y los sucesos *A* y *B* son compuestos y están

formados por los siguientes sucesos elementales:

$$A = \{(MMM), (MMV), (MVM), (MVV)\}$$

$$B = \{(VVV), (MVV)\}$$

Operaciones con sucesos. Dados dos sucesos, A y B, se llaman:

Unión		$A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B.
Intersección		$A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.
Diferencia		$A - B$ es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.
Suceso contrario		El suceso $\bar{A} = E - A$ se llama suceso contrario de A.

Si $A \cap B = \emptyset$, se dicen que son incompatibles

Si $A \cup B = E$, son complementarios

Ejemplo:

En el experimento $E =$ lanzar un dado al aire, considere los sucesos:

A = Sacar un numero par

B= Obtener 1, 2, 3 ó 5

C = Obtener un 4 ó 6

D = Obtener 2, 4 ó 6

F = Obtener un 1 ó 3

G = Obtener un múltiplo de 3

Solución

El espacio muestral está formado por los sucesos elementales:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los sucesos:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$C = \{4, 6\}$$

$$D = \{2, 4, 6\}$$

$$F = \{1, 3\}$$

$$G = \{3, 6\}$$

- $A = D$, por estar formados por los mismos suceso elementales
- B y C son incompatibles por que $B \cap C = \emptyset$
- A y B son complementarios, porque $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$
- $A \cap G = \{6\}$; o sea, el suceso "sacar un número par" y sea "múltiplo de tres" es equivalente a "sacar un 6".

Probabilidad P(A): Los primeros estudios sobre probabilidad fueron motivados por la posibilidad de aciertos o de fracaso en los juegos de azar, es decir que tenga ocurrencia o no de un suceso entre varios posibles; al lanzar una moneda, por ejemplo, el obtener una "cara" es un acierto entre dos casos posibles; al lanzar un dado, el número 3 es un acierto entre seis casos posibles. Si la sacar una carta de una baraja de 52 cartas se obtiene as, esto es 4 aciertos entre 52 casos posibles.

Problemas como los anteriores originaron la definición clásica de probabilidad. Designado como P(A) la probabilidad de ocurrencia del

suceso A entre un número N de casos posibles de ocurrencia.

$$P(A) = \frac{\# \text{ Sucesos o casos favorables}}{\# \text{ Sucesos o casos posibles}} = \frac{F}{N}$$

EJEMPLOS

1. Cuál es probabilidad de obtener una cara en el lanzamiento de una moneda.

Solución

Número de sucesos posibles: $N = 2$, que pueden ser: C ó S

Número de casos favorables: $F = 1$, cara.

Se entiende por caso favorable el evento que se quiere predecir.

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

La probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda es del 50%.

2. Cuál es probabilidad de obtener un tres en el lanzamiento de un dado.

Solución

Número de sucesos posibles: $N = 6$, que pueden ser: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Número de casos favorables: $F = 1$, el 3.

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{1}{6} = 0,167 = 16,7\%$$

La probabilidad de obtener un 3 en el lanzamiento de un dado, es del 16,7%.

3. Cuál es probabilidad de obtener un As en una baraja de 52 cartas

Solución

Número de sucesos posibles: $N = 52$, que pueden ser:

4 Ases, 9 corazones, 9 diamantes, 9 Picas, 9 tréboles, 4 Jotas, 4 K y 4 Q

Número de casos favorables: $F = 4$, los cuatro ases.

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{4}{52} = 0,077 = 7,7\%$$

La probabilidad de obtener un As en el en una baraja de 52 cartas, es del 7,7%.

4. Sea una urna que contiene que contiene 3 bolas rojas, 5 blancas y 4 azules, hallar la probabilidad de que al sacar una bola esta sea:

- a) blanca
- b) roja
- c) azul

Solución

Número de sucesos posibles: $N = 12$, que pueden ser:

R R R
B B B B B
A A A A

- a) blanca

Número de casos favorables: $F = 5$, las bolas blancas.

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{5}{12} = 0,417 = 41,7\%$$

La probabilidad de obtener una bola blanca de la urna es del 41,7%

- b) Roja

Número de casos favorables: $F = 3$, las bolas rojas.

$$P(B) = \frac{F}{N} = \frac{3}{12} = 0,25 = 25\%$$

La probabilidad de obtener una bola roja de la urna es del 25%

b) azul

Número de casos favorables: $F = 4$, las bolas azules.

$$P(C) = \frac{F}{N} = \frac{4}{12} = 0,333 = 33,3\%$$

La probabilidad de obtener una bola azul de la urna es del 33,3%

5. Se lanza simultáneamente dos monedas (o la misma dos veces), hallar la probabilidad de que se obtenga dos caras.

Solución

Número de sucesos posibles: $N = 4$, que pueden ser:

Cara Cara
 Cara Sello
 Sello Cara
 Sello Sello

Número de casos favorables: $F = 1$, cara-cara.

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

La probabilidad de obtener cara – cara en un lanzamiento de dos monedas es del 25%.

6. De una urna que contiene 3 bolas rojas y 5 azules se extraen simultáneamente dos bolas, hallar la probabilidad de que las dos sean rojas.

Solución

Designemos las tres bolas rojas como R_1, R_2, R_3 y las 5 bolas azules como A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Las combinaciones que podrían darse, en el experimento, son las siguientes:

$R_1-R_2, R_1-R_3, R_1-A_1, R_1-A_2, R_1-A_3, R_1-A_4, R_1-A_5$

$R_2-R_3, R_2-A_1, R_2-A_2, R_2-A_3, R_2-A_4, R_2-A_5$

$A_1-A_2, A_1-A_3, A_1-A_4, A_1-A_5$

$A_2-A_3, A_2-A_4, A_2-A_5$

A_3-A_4, A_3-A_5

A_4-A_5

Número de sucesos posibles: $N = 28$.

Número de casos favorables: $F = 3$, que son:

$R_1-R_2, R_1-R_3, R_2-R_3$

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{3}{28} = 0,107 = 10,7\%$$

La probabilidad de obtener dos bolas rojas en el experimento anterior es del 10,7%.

Leyes de la probabilidad: Las probabilidades se fundamentan en tres reglas básicas.

1.- Toda probabilidad es menor que 1 pero mayor que 0 (o lo que es lo mismo, entre 0% y 100%).

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$0\% \leq P(A) \leq 100\%$$

2.- La suma de las probabilidades de todos los eventos posibles es igual a 1 (ó 100%)

$$\sum P = 1$$

$$\sum P = 100\%$$

3.- La probabilidad de acierto (p) más la probabilidad de fracaso (q) es igual 1.

$$P(A) + Q(A) = 1$$

$$P(A) + Q(A) = 100\%$$

EJEMPLOS

7. Sea una urna que contiene que contiene 5 bolas rojas, 6 blancas y 3 azules, hallar la probabilidad de que al sacar una bola esta sea:

- a) blanca
- b) roja
- c) azul

Solución

El espacio muestral sería:

R R R R R
B B B B B
A A A

Número de sucesos posibles: $N = 14$

- a) blanca

Número de casos favorables: $F = 3$.

$$P(A) = \frac{F}{N} = \frac{3}{14} = 0,214 = 21,4\%$$

- b) roja

Número de casos favorables: $F = 5$.

$$P(B) = \frac{F}{N} = \frac{5}{14} = 0,357 = 35,7\%$$

- c) azul

Número de casos favorables: $F = 6$.

$$P(C) = \frac{F}{N} = \frac{6}{14} = 0,429 = 42,9\%$$

- Se puede observar que ninguna de las probabilidades es superior a 1 (ó 100%)

$$\sum P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$0,214 + 0,357 + 0,429 = 1$$

- La probabilidad de NO sacar una bola blanca (D); es lo mismo, que la probabilidad de sacar una bola roja o azul.

$$P(D) = \frac{8}{14} = 0,571 = 57,1\%$$

Otra forma de calcular esta probabilidad es:

$$P(D) = 1 - p(A)$$

$$P(D) = 1 - 0,429$$

$$P(D) = 0,571 = 57,1\%$$

PROBLEMAS 9

1. Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
 - a. Lanzar tres monedas.
 - b. Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
 - c. Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
2. Para el espacio muestral del ejercicio 1b, considere los siguientes sucesos.
 - a. Salir múltiplo de 5
 - b. Salir un número primo.
 - c. Salir mayor o igual a 12.
3. Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: $A = \text{"salir un número primo"}$ y $B = \text{"salir un número cuadrado"}$. Responde a las cuestiones siguientes:
 - a. Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$
 - b. Los sucesos A y B , ¿son compatibles o incompatibles?
 - c. Encuentra los sucesos contrarios de A y B .
4. Se lanzan dos dados equilibrados con seis caras marcadas con los números del 1 al 6. Se pide:
 - a. Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

Se recomienda que la siguiente serie de ejercicios lo hagan los estudiantes en casa

5. Si en una caja tenemos 15 bolas blancas, 30 bolas negras y 45 bolas verdes. Si extraemos tres bolas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que salga una bola de cada color? (realizar en casa)
6. Si escogemos al azar dos números de teléfono y observamos la última cifra de cada uno, determina las probabilidades siguientes:
 - a. Que las dos cifras sean iguales.
 - b. Que su suma sea 11.
 - c. Que su suma sea mayor que 7 y menor que 13.
7. Se tiran tres dados al mismo tiempo. Encuentra la probabilidad de que:
 - a. La suma de los números aparecidos sea menor que 8.
 - b. La suma de los números sea mayor que 4 y menor que 8.