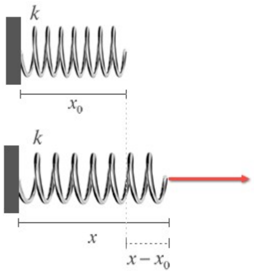
UNIDAD 2

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

El movimiento armónico simple (M.A.S.), es un movimiento periódico, y vibratorio en ausencia de fricción, producido por la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional a la posición, y que queda descrito en función del tiempo por una función senoidal (seno o coseno).

En el caso de que la trayectoria sea rectilínea, la partícula que realiza un M.A.S. oscila alejándose y acercándose de un punto, situado en el centro de su trayectoria, de tal manera que su posición en función del tiempo con respecto a ese punto es una sinusoide. En este movimiento, la fuerza que actúa sobre la partícula es proporcional a su desplazamiento respecto a dicho punto y dirigida hacia éste.

2.1 LEY DE HOOK. Cuando aplicas una fuerza a un resorte, probablemente este se alargará. Si duplicas la fuerza, el alargamiento también se duplicará. Esto es lo que se conoce como la ley de Hooke.



La ley de Hooke establece que el alargamiento de un resorte es directamente proporcional a la fuerza que se le aplique, siempre y cuando no se deforme permanentemente dicho resorte.

$$F = -kx$$

Donde;

- **F** es la fuerza que se aplica al resorte.
- **k** es la constante elástica del resorte, que relaciona fuerza y alargamiento. Cuanto mayor es su valor más trabajo costará estirar el resorte. Depende del resorte, de tal forma que cada uno tendrá la suya propia.
- ***x*** es el alargamiento del resorte al aplicarle la fuerza.

Ejemplo 1.

Si aplicamos a un resorte una fuerza **F** a un resorte, este se alarga 5.9 cm. Si la constante de elasticidad del resorte es de 2400 N/m. Calcula la fuerza de recuperación que experimenta el resorte.

$$F = -kx$$

$$F = -(2400N/m)(0.06m) = 141,6N$$

2.3 PARTES DE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE. Para el entendimiento del movimiento armónico simple se hace necesario conocer sus elementos:

Oscilación sencilla: es el movimiento de un extremo al otro de la trayectoria

Oscilación completa: es el movimiento de un extremo al otro de la trayectoria y regreso hasta el punto de partida, es decir, una oscilación completa son dos oscilaciones sencillas.

Periodo (T): es el tiempo que tarda una partícula en dar una oscilación completa.

$$T = \frac{t}{\#\ oscilaciones}$$

Frecuencia (*f*): es la cantidad de oscilaciones completa que la partícula realiza en la unidad de tiempo. Se mide en Hertz (hz)

$$f = \frac{\#\ oscilaciones}{t}$$

De lo anterior se cumple que: $f = \frac{1}{T}$ $\quad T = \frac{1}{f}$

Punto de equilibrio: es el punto central de la trayectoria de la partícula.

Punto de retorno: son los extremos de la trayectoria que limitan el movimiento de la partícula.

Elongación (x): es la distancia que separa la partícula de su posición de equilibrio.

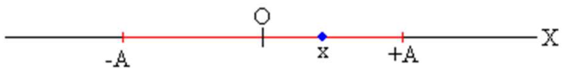
Amplitud (A): es la máxima elongación posible y equivale a la distancia que separa la partícula de la posición de equilibrio.

Frecuencia angular (ω): es el ángulo girado por una unidad de tiempo y se designa mediante la letra griega **ω**. Su unidad en el Sistema Internacional es el radián por segundo (rad/s)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

2.2 CINEMÁTICA. Una partícula describe un Movimiento Armónico Simple (M.A.S.) cuando se mueve a lo largo del eje x, estando su posición x dada en función del tiempo t por la ecuación:

$$x = \quad Acos(wt + \varphi)$$



Donde;

$-A\ es\ la\ amplitud$
$-\omega\ es\ la\ frecuencia\ angular$
$-\omega t+\varphi\ es\ la\ fase$
$-\omega\ es\ la\ fase\ inicial$

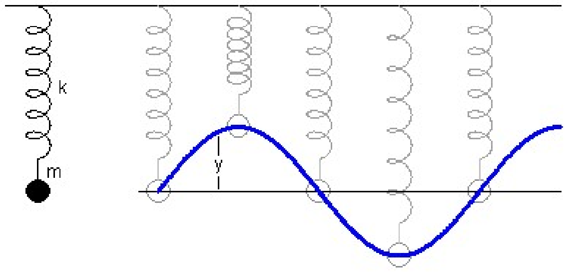
En un movimiento rectilíneo, dada la posición de un móvil como:

$x = \quad Acos(wt+\varphi) \qquad x_{max} = \quad A$

Se puede derivar las ecuaciones de la velocidad y la aceleración.

$v = -Awsen(wt+\varphi) \qquad v_{max} = -Aw$

$a = -Aw^2cos(wt+\varphi) \qquad a_{max} = -Aw^2$



Si el movimiento armónico simple, se da a lo largo del eje y, se pueden utilizar las siguientes ecuaciones

$y = \quad Asen(wt+\varphi) \qquad y_{max} = \quad A$

$v = \quad Awcos(wt+\varphi) \qquad v_{max} = \quad Aw$

$a = -Aw^2sen(wt+\varphi) \qquad a_{max} = -Aw^2$

En función de la *elongación*, la velocidad en el movimiento armónico simple viene dada por la expresión

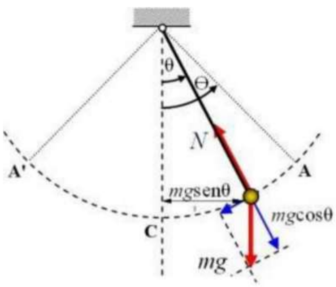
$$v = \omega\sqrt{A^2-x^2}$$

2.3 MOVIMIENTO PENDULAR. Un péndulo que describe un Movimiento Armónico Simple, la fuerza recuperadora **F** viene dada por:

$F = -mgsen\theta$

La frecuencia angular **ω** por:

$w = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad k = \frac{mg}{l}$

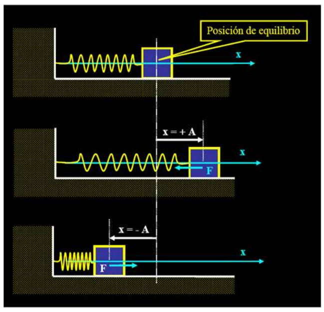


Y el periodo **T** como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.4 SISTEMA MASA RESORTE. Un sistema masa resorte que describe un Movimiento Armónico Simple, la fuerza recuperadora **F** viene dada por:

$F = -kx$



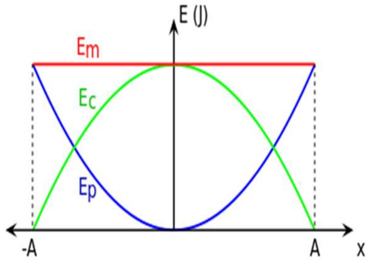
La frecuencia angular **ω** por:

$w = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Y el periodo **T** como:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

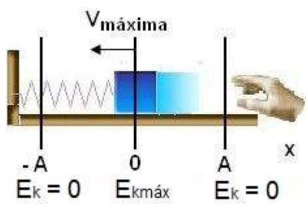
2.5 ENERGÍA EN EL M.A.S (Em). Para estudiar las componentes energéticas del movimiento armónico simple podemos suponer que no hay fuerzas de fricción o rozamiento y por tanto la energía mecánica $\mathbf{E_m}$, está compuesta principalmente de *energía cinética* $\mathbf{E_k}$ y *energía potencial* elástica $\mathbf{E_p}$, permanece constante. Esto significa que:



$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Energía cinética ($\mathbf{E_k}$). La energía cinética en un movimiento armónico simple en un punto está asociada a la velocidad que el cuerpo tiene en dicho punto. Recuerda que la velocidad en un oscilador armónico es máxima en la posición de equilibrio y 0 en los extremos

La energía cinética E_k en un movimiento armónico simple varía de manera periódica entre un valor mínimo en los extremos y un valor máximo en la posición de equilibrio. Su valor puede venir expresado en función de la elongación x o en función del tiempo t.



$E_k = \frac{1}{2}k(A^2-x^2) \qquad E_k = \frac{1}{2}kA^2sen^2(\omega t+\varphi)$

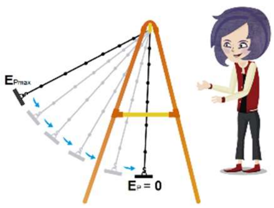
donde $k = mw^2\ constante\ del\ M.A.S.$

Para el punto de equilibrio la energía cinética es máxima y puede determinarse con:

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}kA^2$$

Energía potencial (E_p). La fuerza recuperadora o elástica es una fuerza conservativa. El trabajo realizado por las fuerzas conservativas depende únicamente de los puntos inicial y final, y no del camino elegido. Por ello, las fuerzas conservativas dan lugar a la energía potencial. En este caso se trata de energía potencial elástica, al ser la fuerza responsable la fuerza recuperadora o elástica.

La energía potencial ***Ep*** en un movimiento armónico simple varía de manera periódica entre un valor mínimo en la posición de equilibrio y un valor máximo en los extremos. Su valor puede venir expresado en función de la elongación ***x*** o en función del tiempo ***t***.



$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_p = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi)$$

donde $k = mw^2$ $constante\ del\ M.A.S.$

La energía potencial alcanza su máximo en los extremos de la trayectoria y tiene valor nulo (cero) en el punto ***x*=0**, es decir el punto de equilibrio:

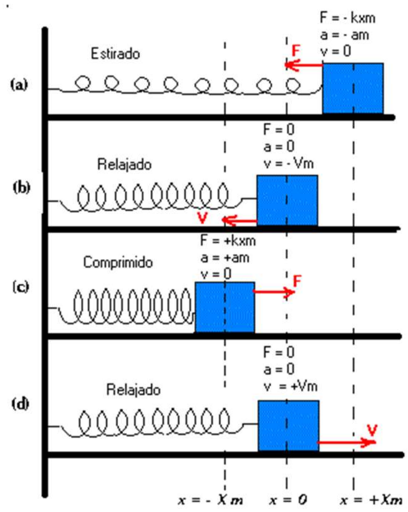
$$E_{Pmax} = \frac{1}{2}kA^2$$

Ejemplo 2. Un muelle elástico de 10 cm tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical y descansa en una superficie horizontal sin rozamiento. Se le aplica una fuerza de 20N para mantenerlo estirado una longitud de 15 cm. Esta posición se suelta y oscila libremente con un periodo de oscilación de 4 segundos. Calcular:

a. La constante de recuperación del resorte.
b. La ecuación del movimiento vibratorio armónico resultante.
c. La energía potencial y cinética cuando está a 2 cm de la posición de equilibrio
d. La velocidad y la aceleración máxima, indicando la elongación que corresponde a cada uno de ellas.

Solución.

Primero hagamos la figura para comprender mejor.



Datos que nos da el problema:

$F = 20\,N \qquad l_0 = 10\,cm \qquad l_f = 15\,cm \quad T = 4seg$

Nos dice que inicialmente el muelle (resorte) tiene una longitud de 10 cm, al aplicarle una fuerza alcanza una longitud de 15 cm; o sea, que ha sufrido un alargamiento:

$$x = l_f - l_0 = 15 - 10 = 5\,cm = 0.05m$$

Con el periodo suministrado, podemos hallar la frecuencia angular ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}rad/seg$$

a. La constante de recuperación del resorte. Aquí aplicamos la ley de Hooke

$$F = kx \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{F}{x} = \frac{20N}{0.05m} = 400N/m$$

b. La ecuación del movimiento vibratorio armónico resultante. Busquemos la ecuación de la elongación sobre el eje x, que es:

$$x = \quad Acos(wt + \varphi)$$

Determinemos cada uno de las variables implicadas en la ecuación.

- La amplitud A, es el alargamiento máximo; para el caso 0,05 m; o sea, A = 0,05 m
- Frecuencia angular ω, fue calculada al principio; el valor es, $\omega = \frac{\pi}{2}rad/seg$
- Fase φ, Para su cálculo debemos analizar las condiciones iniciales del MAS.

Al leer encontramos que en el instante inicial del MÁS, el resorte se encuentra estirado hasta su máxima elongación; o sea, que para:

$t = 0, \quad x = A$

Reemplazando estos valores en la ecuación de la elongación tenemos:

$$x = \quad Acos(wt + \varphi)$$

$$0{,}05 = 0{,}05cos\left(\frac{\pi}{2}(0) + \varphi\right)$$

$$cos(\varphi) = \frac{0{,}05}{0{,}05}$$

$$\varphi = \cos^{-1}(1) = 0$$

Entonces la ecuación del movimiento, se obtiene reemplazando a: $A,\ \omega,\ \varphi$ por lo tanto la ecuación:

$$x = \quad Acos(wt + \varphi)$$

Queda:

$$x = \quad 0{,}05cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

c. La energía potencial y cinética cuando está a 2 cm de la posición de equilibrio. Para hallar la energía con una elongación de 0,02 m, escogemos la ecuación en función de la elongación que son:

- Energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(400)(0.02^2) = 0.08\ \mathrm{J}$$

- Energía cinética:

$$E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}(400)(0.05^2 - 0.02^2)$$

$$E_k = 0{,}42\ \mathrm{J}$$

- Energía mecánica total:

$$E_m = E_k + E_p = 0{,}42 + 0{,}08 = 0{,}5\ \mathrm{J}$$

d. La velocidad y la aceleración máxima, indicando la elongación que corresponde a cada uno de ellas.

- Velocidad máxima: esta se obtiene en el punto de equilibrio; o sea, cuando x = 0. La ecuación que determina la velocidad máxima es:

$$v_{max} = \mathrm{A}\omega = (0{,}05)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.025\pi\ \mathrm{m/seg}$$

- Aceleración máxima: esta se obtiene en los puntos de retorno; o sea, cuando x = A

$$a_{max} = \mathrm{A}\omega^2 = (0{,}05)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$a_{max} = 0.0125\pi^2\mathrm{m/seg^2}$$

Ejemplo 2. Un resorte se alarga 4 cm cuando se cuelga de él un objeto de 20 kg de masa. A continuación, se estira el resorte 3 cm más y se le deja que oscile libremente. Determina el periodo y la frecuencia angular del movimiento. Calcula los valores de la elongación, velocidad, aceleración a los 2,1 seg de iniciado el movimiento.

Datos que nos da el problema:

$$m = 20\ kg\ \ Alargamiento = 0{,}04m, \qquad A = 0{,}03m$$

Con los datos iniciales podemos hallar la constante de elasticidad, aplicando la ley de Hooke:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{mg}{y} = \frac{(20)(9{,}8)}{0{,}04} = 4900\ \mathrm{N/m}$$

- Periodo (T): Escogemos la ecuación para calcular el periodo de un sistema masa resorte

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{20}{4900}} = 0{,}4\ seg$$

- Frecuencia angular (ω): Nos valemos de la ecuación general

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi\ rad/seg$$

- Elongación (y): El movimiento es en el eje y, por lo tanto escogemos la ecuación adecuada.

$$y = \quad Asen(wt + \varphi)$$

Según los datos A = 0,03 m, ω = 5π rad/seg y como el movimiento armónico simple empieza sobre el eje y estirado hacia abajo y la función es seno, entonces el ángulo φ = 3π/2. Por lo tanto la ecuación queda:

$$y = \quad Asen(wt + \varphi) = 0{,}03sen(5\pi t + 3\pi/2)$$

$$Para\ un\ t = 2.1s,$$

$$y = 0{,}03sen(5\pi \cdot 2{,}1 + 3\pi/2) = 0\ \mathrm{m}$$

- Como y = 0, significa que está en el punto de equilibrio, por lo tanto, la velocidad es máxima y la aceleración es cero

$$v_{max} = \mathrm{A}\omega = 0{,}03(5\pi) = 0{,}15\pi\ \mathrm{m/seg}$$

Ejemplo 3. ¿En qué posiciones de la partícula que describe un movimiento vibratorio armónico simple se igualan las energías cinética y potencial?

Datos que nos da el problema:

$$E_p = E_k$$

La energía total del movimiento es: $E_m = \frac{1}{2}kA^2$

Si los valores de las energías son iguales, entonces la energía potencial es la mitad de la total:

$$E_p = \frac{E_m}{2}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}A^2$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

DESARROLLO MIS COMPETENCIAS 2

1. Un saco de arena de un gimnasio tiene una masa de 600 g, al golpearlo oscila con una frecuencia de 3 Hz y una amplitud de 25 cm.
   e. ¿Cuál es la energía cinética máxima del saco?
   f. ¿Y su energía cinética cuando se encuentra a 10 cm de su posición de equilibrio?

2. Un cuerpo de 0,4 kg de masa unido a un resorte experimenta un M.A.S. con un período de 0,75 s y una amplitud de 10 cm.
   a. ¿Cuál es la constante elástica del resorte?
   b. ¿Qué energía cinética posee el cuerpo a 6 cm de la posición de equilibrio?
   c. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración máximas?

3. Apoyado en un plano horizontal, sin rozamiento, hay un bloque de masa m = 0,5 kg, sujeto al extremo libre de un resorte horizontal, fijo por el otro extremo. Aplicas al bloque una fuerza de 15 N y el resorte se alarga 10 cm. En esta posición sueltas el cuerpo, que inicia un movimiento armónico simple.
   a. ¿Cuál es la ecuación de movimiento del bloque?
   b. ¿Cuáles son las energías cinética y potencial cuando la elongación es de 3 cm?

4. Un cuerpo de 0.5 kg, sujeto al extremo de un resorte horizontal de constante elástica k = 300 N/m, tiene un M.A.S. Cuando el cuerpo está a 12 mm de su posición de equilibrio, su velocidad es de 0.3 m/s,
   a. ¿cuál es la energía total del cuerpo?
   b. ¿Y la amplitud de su movimiento?
   c. ¿Y la velocidad máxima que alcanza el cuerpo?

5. Una partícula de 0,2 kg, describe un M.A.S. de 1,2 s de período. En el instante inicial su energía cinética es 0,2 J y su energía potencial es 0,8 J.

   ¿Cuál es su elongación en el instante en que su energía cinética es igual que su energía potencial?